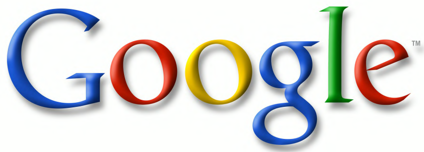
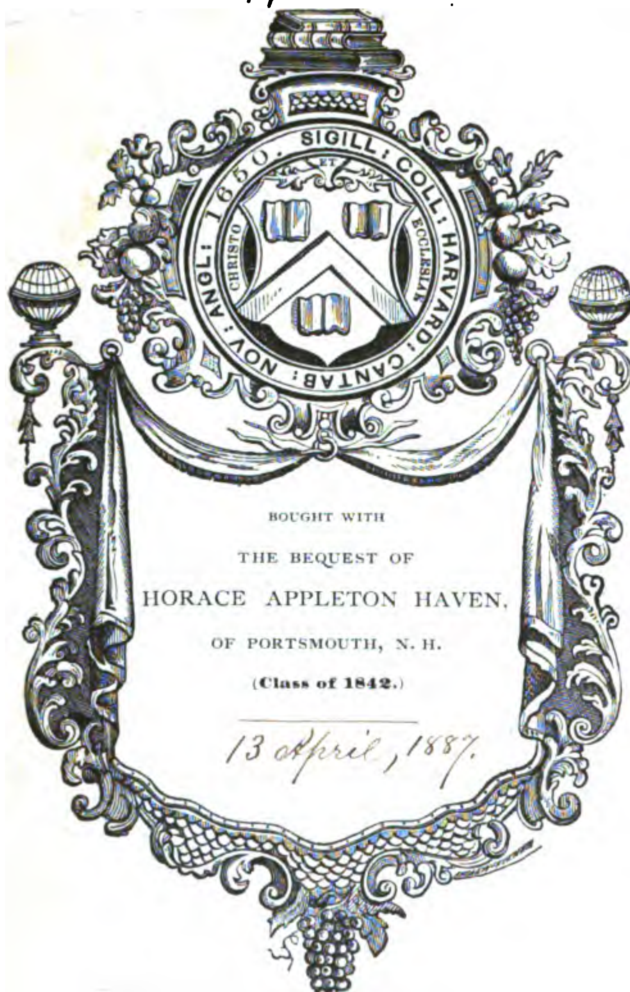



SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE
BOUGHT WITH
THE BEQUEST OF
HORACE APPLETON HAVEN,
OF PORTSMOUTH, N. H.
(Class of 1842.)
13 April, 1887.

LE EQUAZIONI

NUMERICHE, INTIERE E RAZIONALI AD UNA INCOGNITA

MATEMATICA PRATICA



LE EQUAZIONI

NUMERICHE, INTIERE E RAZIONALI

AD UNA INCOGNITA

PER L'INGEGNERE

GIUSEPPE PONCINI.

Professore e Preside dell' Istituto Tecnico di Casalmonferrato.



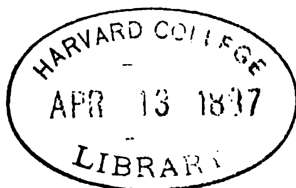
ULRICO HOEPLI

LIBRAIO-EDITORE

MILANO

NAPOLI | PISA

1877



Coi tipi di G. Bernardoni.

PREFAZIONE.

Nel trattare questioni di matematica applicata occorre sovente di dover discutere e risolvere equazioni numeriche di grado superiore al secondo. I procedimenti diversi, indicati dagli ordinari trattati d'algebra, per raggiungere questo scopo, non vanno esenti da difficoltà, che, se non sembrano gravi quando si considerano le questioni in astratto e si accenna in massima ai metodi, diventano quasi insuperabili quando si deve lottare contro le accidentalità numeriche che presentano i casi particolari. Così prima di poter giungere alla questione tanto complessa della separazione delle radici reali, converrebbe in generale far procedere la ricerca e l'eliminazione tanto delle radici commensurabili, quanto delle uguali, per le quali ultime sarebbe necessario il lunghissimo calcolo del massimo comun divisore; tale lavoro preparatorio poi dovrebbe farsi mentre in generale se ne presentirebbe l'inutilità; giacchè sarà affatto eccezionale il caso di equazioni, riferentisi a problemi di fisica, di meccanica, di costruzioni, ecc., che ammettano radici commensurabili od uguali. Allo scopo di sbarazzarsi di tutto questo, si può in alcuni casi, schivando qualsiasi difficoltà, ricorrere ad un metodo speditivo, del quale ho fatto notare talune applicazioni in un opuscolo intitolato: *I termini di correzione in alcuni problemi di matematica applicata,** al

* Milano, U. Hoepli, editore, 1874.

quale rimando il lettore. Pur tuttavia con questo metodo — il quale d'altronde non è generale — resta pur sempre insoluto il problema della discussione completa della equazione che può aversi tra mani; ed è nel desiderio di offrire ai cultori delle scienze applicate un libro breve che potesse guidare in ricerche siffatte, che io m'accinsi a questo lavoro.

Tale essendo lo scopo prefissomi, è naturale che io dovessi; — pure attingendo idee all'opera immortale di Lagrange, che, a mezzo dell'equazione ai quadrati delle differenze, considera il problema nella sua generalità e fornisce metodi senza eccezione in astratto, ma di insuperabile lunghezza nei casi pratici; — pur consultando i numerosi trattati di algebra complementare, fra i quali ve ne ha certamente di eccellenti, ma in cui questa questione della risoluzione delle equazioni è forse mescolata troppo con altre ed occupa un posto secondario; — dovessi, dico, ricorrere specialmente a libri, che presentassero questo di caratteristico, di essere stati fatti da autori i quali, studiosi della matematica applicata, si fossero trovati nella necessità di risolvere equazioni che loro effettivamente portavano innanzi le questioni pratiche. Di autori siffatti io citerò due: Newton e Fourier, i quali entrambi studiarono i fenomeni della natura, entrambi risolsero equazioni presentate loro da questo studio, e scrissero per un bisogno realmente sentito; del che portano scolpita l'impronta le loro opere immortali. — Dunque, non una equazione combinata a disegno e proposta come esercizio per rifare in ordine inverso, discutendola, la via già battuta prima nel comporla; ma l'equazione colle difficoltà numeriche che può presentare nei casi pratici; ecco il punto di partenza di questo libro: — la discussione completa ed immediata della medesima con metodi brevi, certi, invariabili; eccone lo scopo.

È evidente intanto che questo lavoro per sua natura doveva precisamente essere l'antitesi d'una raccolta o d'una collezione; doveva, anzichè esporre tutto quanto si è fatto riguardo al soggetto trattato e mostrare una erudizione inopportuna qui, essere piuttosto la scelta fra ciò che si è fatto di quanto venisse giudicato strettamente necessario allo scopo, collegandolo in un insieme breve, le

cui parti armonizzassero fra loro, nel quale si conciliassero assoluto rigore matematico nella trattazione della materia, semplicità nelle dimostrazioni, chiarezza nei metodi, applicabilità immediata dei medesimi, e non si perdesse di vista giammai lo scopo aritmetico prefisso. — Ed è quanto ho tentato di fare.

A parte l'indirizzo pratico di questo lavoro e il metodo seguìto, rispetto ai quali confido ognuno vorrà considerare il medesimo come originale, — quanto possa trovarvisi di assolutamente nuovo potrà avvertire solamente quel lettore, che ponga a confronto il lavoro medesimo con altri che trattino di questo soggetto. Senza intendere di esporre al riguardo le mie pretese, le quali potrebbero forse sembrare eccessive, mi permetterò di notare nell'indice generale seguente con un asterisco quelle parti, sulle quali chiamo specialmente l'attenzione del lettore, e mi permetto qui in via sintetica di accennare ai punti fondamentali del libro, e cioè: — al concetto di limitazione per la radice, che compare già nella definizione e che accompagna in tutta l'opera; — alla regola newtoniana sui limiti generali, portata fino alle estreme sue conseguenze; — ad una geometria analitica delle curve ad equazione intiera e razionale, la quale, oltre all'essere feconda di risultati per lo scopo prefisso, è base allo studio delle leggi dei fenomeni naturali; giacchè essa si occupa di quelle curve speciali, le quali bene spesso s'incontrano nello studio medesimo, e per altra parte non sono di proposito trattate nella geometria analitica ordinaria, che si aggira quasi esclusivamente sulle coniche; — al metodo della separazione delle radici e a quello dell'isolamento; — alla equazione ausiliaria proposta pel caso eccezionale delle radici uguali.

Il numero dei teoremi in questo lavoro è ristretto a quelli puramente necessarii; talchè sulle prime a taluno potrà recar sorpresa la mancanza di alcuni di essi, che entrano convenzionalmente nei trattati d'algebra complementare; i procedimenti aritmetici sono in quella vece largamente trattati e discussi; è dato vasto campo agli algoritmi; trovansi agevolate e dirette le operazioni; per sistema pochissimo resta affidato alla memoria, tutto allo spirito del metodo. Pare quasi inutile lo accennare che quanto questo lavoro

è sobrio nella teoria, altrettanto è diffuso nelle applicazioni; delle quali si troverà in esso maggior numero di quanto a prima vista potrebbesi giudicare dalla sua mole. Per rendere più interessanti le medesime si sono scelte bene spesso in guisa, che servissero non solo ad illustrazione, ma valessero eziandio a complemento delle regole esposte, offrissero qualche nuovo punto di vista, conducessero a qualche risultato speciale. Nasce da ciò che male si argomenterebbe di raggiungere lo scopo del libro, — di rendersi cioè famigliari i precetti esposti, e farsi una abitudine di essi, — chi, impensierito dall'entità e dalla copia dei còmputi, non tenesse dietro alle applicazioni numeriche, non le sviluppasse accuratamente, non completasse quelle parti delle medesime solamente accennate nel testo, e non tracciasse le linee, di cui il testo non indica se non il modo di costruzione. Certo — ed è bene che lo studioso lo sappia sin da principio — affinchè egli possa ritrarre da questo libro l'utilità che io me ne riprometto, non bastano la lettura e la meditazione, è necessario eziandio il lavoro tanto aritmetico, quanto grafico; ma del resto, superata questa fatica, egli possederà appieno il metodo di discussione, scopo precipuo dell'opera, e si sarà poi assai famigliarizzato col metodo delle costruzioni grafiche, di cui si fa oggi tanto uso, e tanto utilmente, nello studio delle scienze naturali per rappresentare i fenomeni e dedurne le leggi.

Desidero d'aver fatto un libro utile e nel quale non manchi affatto quello spirito aritmetico, che tanto distingue le opere dei nostri maestri e in forza del quale le verità matematiche passano dalla regione elevata della teoria al campo fecondo della pratica. Questa è l'unica mia ambizione; e se sarò riuscito nel mio intento, e se quest'opera verrà giudicata degna di favorevole accoglienza, proverò un conforto più che sufficiente alla gravissima fatica durata.

Aprile 1876.

G. PONCINI.

ARGOMENTI PRINCIPALI

TRATTATI IN QUESTO LIBRO.

CAPITOLO PRIMO.

Polinomio, ciaschedun termine del quale è il prodotto di un numero intiero o frazionario per una potenza intiera e positiva di una stessa lettera x.

Sostituzione nel polinomio precedente di un numero reale o complesso alla lettera x; il polinomio dicesi *funzione intiera e razionale della lettera* x, ed indicasi con

$$f(x), \quad \varphi(x), \ldots$$

Risultati $f(\alpha)$ ed $f(\alpha + H)$, nei quali α è un numero ed H una lettera: derivate

$$f'(x), \quad f''(x), \quad f'''(x), \ldots$$

Differenza $f(\alpha + H) - f(\alpha)$ nel caso di H piccolissimo.

* Legge di continuità per la funzione $f(x)$.

CAPITOLO SECONDO.

Alcune sostituzioni, fatte nel capitolo precedente, porgono l'opportunità di definire la condizione

$$f(x) = 0;$$

ossia *l'equazione numerica intiera e razionale ad una incognita.*

Fra i casi particolari di numeri, che soddisfano alla condizione precedente, si considera quello dei due numeri complessi coniugati

$$\beta \pm \gamma' i.$$

Si dimostra il *teorema fondamentale* relativo ai risultati ottenuti colla sostituzione di due numeri diversi ad x in $f(x)$.

Si studia il caso di una equazione di grado impari e quello d'una equazione di grado pari con ultimo coefficiente negativo.

* Si discute l'equazione

$$x^3 - 2x - 5 = 0:$$

si prova che essa ha una sola radice positiva; — si verificano diverse limitazioni per la medesima.

* Numero reale ρ che annulla $f(x)$, ossia che è *radice* della equazione $f(x) = 0$; sua misura nella limitazione

$$r < \rho < R.$$

* Si riprende l'equazione

$$x^3 - 2x - 5 = 0;$$

e si verificano delle limitazioni pei numeri complessi che la soddisfano.

* Numeri complessi, $\sigma + \tau i$, che annullano $f(x)$, ossia che sono *radici* dell'equazione $f(x) = 0$: loro misura nelle limitazioni, i cui termini sono:

$$s + ti \ldots S + Ti.$$

Divisibilità di $f(x)$ per $x - \rho$ o per $x - (\sigma + \tau i)$ se ρ e $\sigma + \tau i$ sono radici di $f(x) = 0$, come in generale debba intendersi questa divisibilità.

Esempii della divisibilità precedente, nel caso di radici commensurabili (reali o complesse).

Conseguenza della divisibilità precedente e cioè: corrispondenza fra le radici reali

$$\rho, \rho', \rho'', \ldots$$

di $f(x) = 0$ e i fattori di 1° grado

$$x - \rho, \quad x - \rho', \quad x - \rho'', \ldots;$$

fra le radici complesse

$$\sigma \pm \tau' i, \ldots$$

e i fattori di secondo grado

$$(x - \sigma)^2 + \tau'^2, \ldots:$$

numero delle radici di $f(x) = 0$, rispetto al grado.

CAPITOLO TERZO.

Nello studio delle radici dell'equazione $f(x) = 0$ si può ammettere che essa sia mancante di radici nulle.

Basta considerare le radici positive dell'equazione $f(x) = 0$, e di una trasformata $F(x) = 0$, immediatamente ottenibile da quella per avere tutte le radici di $f(x) = 0$.

Caso in cui i coefficienti di $f(x)$ in $f(x) = 0$ hanno tutti lo stesso segno; — l'equazione non ha radici positive.

Caso in cui la successione dei segni nei coefficienti di $f(x)$ presenta un solo cambiamento (una sola variazione); — l'equazione

$$f(x) = 0$$

ha *necessariamente una ed una sola radice positiva.*

Caso in cui la successione dei segni nei coefficienti di $f(x)$ presenta più cambiamenti (più variazioni); — l'equazione $f(x) = 0$ può avere radici positive, ma in numero non maggiore del numero dei cambiamenti di segno (regola di Descartes).

Esistono quantisivogliono numeri come $+L$ e $-L'$, tali che nell'intervallo $(-L' \ldots L)$ trovansi comprese tutte le radici reali di

$$f(x) = 0;$$

tali numeri diconsi *limiti generali* delle radici.

Ricerca d'un numero L; — regola del coefficiente *negativo più grande.*

Ricerca di un numero L; — regola dei numeri uguali opposti ai coefficienti negativi di $f(x)$ divisi per la somma dei positivi che precedono.

Ricerca d'un numero L; — regola newtoniana.

* Il numero $+L$, ottenuto con una delle due prime regole precedenti soddisfa alla regola newtoniana, che può considerarsi come *il vero teorema pei limiti generali.*

* Modo di far uso delle tre regole precedenti.

Si presenta la necessità di regole aritmetiche, atte ad agevolare l'applicazione dei principii esposti.

CAPITOLO QUARTO.

Resto della divisione di $f(x)$ per $x - \alpha$.

Algoritmo $[A]$ pel calcolo di $f(\alpha)$.

* Algoritmo $[A_1]$ pel calcolo di $f(\alpha)$, $f(\alpha')$, $f(\alpha'')$, . . .

* Algoritmo $[A_2]$ pel calcolo di $f\left(\frac{p}{q}\right)$.

* Algoritmo $[A_3]$ pel calcolo di $f\left(\frac{p}{q}\right)$, $f\left(\frac{p'}{q}\right)$, $f\left(\frac{p''}{q}\right)$, . . .

Algoritmo $[B]$ pel calcolo di $f(\alpha)$, $\frac{1}{1}f'(\alpha)$, $\frac{1}{1.2}f''(\alpha)$, . . .

* Algoritmo $[B_1]$ pel calcolo di $f\left(\frac{p}{q}\right)$, $\frac{1}{1}f'\left(\frac{p}{q}\right)$, $\frac{1}{1.2}f''\left(\frac{p}{q}\right)$, . . .

* Come l'algoritmo $[B]$ relativo ai numeri

$$f(\alpha);\quad \frac{1}{1}f'(\alpha);\quad \frac{1}{1.2}f''(\alpha);\ \dots$$

serva a rendere rapidissimamente applicabile la regola newtoniana dei limiti generali: — numerosi esercizii.

* Come il computo dei numeri $f(\alpha)$; $\frac{1}{1}f'(\alpha)$; $\frac{1}{1.2}f''(\alpha)$; . . .

serva al calcolo dei risultati $f(\alpha + H)$, in cui H è variabile.

* Come l'osservazione precedente conduca ad un metodo (*metodo dei tentativi di sostituzione*) che serve a serrare rapidamente l'intervallo, nel quale è compresa una sola radice di $f(x) = 0$; — caso delle equazioni

$$x^5 + x^4 + 5x^3 - 2x^2 - 5x - 1 = 0 \quad x^9 + 2x^5 + 3x - 7 = 0.$$

* Algoritmo per dedurre i risultati

$$f(\alpha + H),\quad f'(\alpha + H),\quad f''(\alpha + H),\ \dots$$

dai numeri

$$f(\alpha),\quad f'(\alpha),\quad f''(\alpha),\ \dots$$

* Può dirsi trattato completamente il caso di una equazione

$$f(x) = 0,$$

la quale ha una sola radice positiva o una sola negativa; caso

che si volle notato in modo speciale, giacchè s'incontra in molti problemi di scienza applicata — esempi: — resta insoluto il problema, nel caso di più variazioni nella successione di $f(x)$ o di $F(x)$, ossia nel caso generale; perciò si ricorre alla rappresentazione grafica del polinomio $f(x)$.

CAPITOLO QUINTO.

Il punto rappresentato sul piano per mezzo di coordinate cartesiane, — assi —, convenzione sui segni dei segmenti rettilinei (fig. 1 e 2).

* Espressione della distanza fra due punti situati su parallele agli assi — espressione della distanza fra due punti comunque collocati sul piano, ecc. (fig. 3, 4, 5).

CAPITOLO SESTO.

Il più semplice dei polinomii studiati in questo lavoro, $ax+b$, rappresentato sul piano; ossia luogo geometrico di equazione

$$y = ax + b \quad \text{(fig. 6).}$$

* Significato preciso delle due costanti a e b nella relazione

$$y = ax + b \quad \text{(fig. 7).}$$

Disegno di rette, date le loro equazioni; — equazioni di rette che soddisfano a due condizioni; — * punto d'incontro di due rette, ecc. (fig. 8, 9, 10).

CAPITOLO SETTIMO.

* Punti e seganti del luogo geometrico rappresentato dalla equazione

$$y = -x^2 + x + 2 \quad \text{(fig. 11).}$$

* Punti e seganti del luogo rappresentato dalla equazione

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{2}{3} \quad \text{(fig. 12).}$$

* Punti e seganti del luogo rappresentato dalla equazione

$$y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x - 3 \quad \text{(fig. 13).}$$

CAPITOLO OTTAVO.

Punti e seganti del luogo geometrico rappresentato dalla condizione generale

$$y = f(x) = a\, x^m + b\, x^{m-1} + \dots$$

* Tre punti M', M, M'' del luogo

$$y = f(x),$$

non possono, in generale, trovarsi su una medesima segante, quando le rispettive loro distanze sono abbastanza piccole (fig. 14)

* Come delle due seganti $M'M$, MM'' che hanno entrambe in comune colla curva il punto M, si passi alla retta detta *tangente* alla curva; — equazione di questa retta (fig. 14bis).

* Posizione rispettiva dell'arco, della tangente, dell'asse x; — come si raggruppino insieme i diversi casi possibili; *concavità* e *convessità*, caratteri analitici corrispondenti (fig. 15, 15bis, 16, 16bis).

Caso particolare della tangente parallela all'asse x: *massimi* e *minimi.*

* Caso particolare in cui il punto di tangenza cade sull'asse x.

Punti di *inflessione* (fig. 17).

* Hanno le medesime ascisse i punti di inflessione della linea

$$y = f(x);$$

e i punti massimi e minimi della

$$y' = f'(x)$$

— conseguenze; — illustrazioni geometriche (fig. 18 e 19).

Andamento del luogo

$$y = f(x).$$

CAPITOLO NONO.

* Discussione del luogo

$$y = -x^2 + x + 2:$$

* Discussione del luogo

$$y = x^2 + x + 1 .$$

* Discussione del luogo

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{2}{3} .$$

* Discussione del luogo

$$y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x - 3 .$$

* Discussione del luogo

$$y = 2x^3 - 5x^2 + x - 1 .$$

* Discussione del luogo

$$y = x^4 + x^3 + \frac{1}{2} x^2 - 8x - 1 .$$

* Discussione del luogo

$$y = \frac{1}{12} x^4 - \frac{1}{2} x^3 + x^2 + \frac{23}{6} x - \frac{5}{12} .$$

* Discussione del luogo

$$y = x^5 - 10x^3 + 6x + 1 .$$

Conclusioni generali; — la *reciproca del teorema fondamentale è vera, esclusone un caso solo,* ecc.

Conclusioni relative al problema della separazione delle radici; — le sole costruzioni grafiche non bastano e la risoluzione del problema deve cercarsi in esse e nei principii analitici.

CAPITOLO DECIMO.

Affinchè dei due numeri L ed L_1, di cui $L > L_1$, il primo soddisfi alla condizione newtoniana dei limiti generali, il secondo no, è sufficiente che fra i risultati

$$f(L_1), \quad \frac{1}{1} f'(L_1), \quad \frac{1}{1 . 2} f''(L_1), \ldots$$

ve ne sia *uno* negativo; — conseguenze.

* Idee fondamentali che servono di punto di partenza alla *separazione* delle radici di $f(x) = 0$.

* Separazione delle radici nella equazione

$$x^3 - 2x - 5 = 0;$$

— *metodo delle due tangenti* (fig. 20 e 21).

* Separazione delle radici nella equazione:

$$x^3 - x^2 + 2x - 3 = 0 \quad \text{(fig. 22).}$$

* Separazione delle radici nella equazione

$$8x^3 - 14x + 7 = 0.$$

* Discussione dell'equazione

$$x^4 + 3x^2 - 2x + 1 = 0.$$

* Separazione delle radici nella equazione

$$x^4 - 3x^2 + 5x - 2 = 0 \quad \text{(fig. 23).}$$

* Discussione della equazione

$$2x^4 - x^3 + 5x^2 - 7x + 2 = 0.$$

* Separazione delle radici nella equazione

$$x^6 - x^5 + 2x^4 - 5x + 1 = 0.$$

* Riassunto del metodo seguìto negli esempii precedenti per procedere alla separazione delle radici (fig. 24).

* *Isolamento* delle radici.

* Studio della equazione

$$x^8 - 3x^5 + x^2 + 2 = 0,$$

sotto il punto di vista dell'isolamento.

* Isolamento delle radici nell'equazione

$$x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0.$$

CAPITOLO UNDECIMO.

* Limite di Newton e limite di Fourier, particolari a ciascheduna radice (fig. 25, 26, 27, 28).
* Ricerca di limitazioni successive; e condizioni per l'applicabilità del metodo d'approssimazione (fig. 29, 30, 31, 32).

* La radice reale, ρ, della equazione

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

vale

$$\rho = 2,094\,551\,481\,5\ldots$$

* La radice negativa, ρ, della equazione

$$8x^3 - 4x + 5 = 0$$

vale

$$\rho = -1,047\,275\,7\ldots$$

* La radice positiva ρ dell'equazione

$$x^5 + 2x^4 + x^3 - 9,1236\,x - 4,5618 = 0$$

vale

$$\rho = 1,438\,169\,4\ldots$$

* L'unica radice reale ρ dell'equazione

$$3x^3 - 2x^2 + 5x - 1 = 0$$

vale

$$\rho = 0,212\,286\,102\,18\ldots$$

* Riassunto del metodo di approssimazione.

CAPITOLO DECIMOSECONDO.

Discussione della equazione

$$x^4 + 0,67\,.\,x^2 - 0,59\,.\,x + 0,11 = 0$$

Studio della separazione delle radici per la equazione

$$x^4 - 4x^3 + 8x + 4 = 0;$$

— radici uguali; — equazione ausiliaria

$$\Psi(x) = 0.$$

* Teorema generale sulle radici uguali; — separazione ed isolamento in questo caso; — illustrazioni geometriche (fig. 33).

Conclusione.

LE EQUAZIONI NUMERICHE

INTIERE E RAZIONALI AD UNA INCOGNITA.

CAPITOLO PRIMO.

Si consideri una somma di termini, ciascheduno dei quali sia il prodotto di un numero reale, intiero o frazionario, di segno determinato positivo o negativo, per una potenza, ad esponente reale, intiero positivo o nullo, di una lettera x; si riuniscano in un solo tutti i termini che contengono la lettera x collo stesso esponente, effettuando le opportune riduzioni sui numeri, coefficienti dei medesimi; e si ordini il risultato secondo le potenze discendenti di questa lettera: — si arriva così in generale al polinomio:

$$a x^m + b x^{m-1} + c x^{m-2} + \dots + j x^2 + k x + l;$$

nel quale m (numero intiero e positivo) è l' esponente più alto della x (il *grado* del polinomio); o, l'esponente più basso; $a, b, c, \dots j, h, l$ sono numeri reali intieri o frazionari (i *coefficienti* del polinomio). Nei casi particolari, il polinomio formato a questo modo può mancare di alcuni termini contenenti potenze della lettera x intermedie tra l'emmesima e la o, ed allora si dice che esso è *incompleto;* mentre lo si chiama *completo,* nel caso in cui tutte le potenze intermedie suddette vi sono contenute.

Così: 1.° Sommando i termini

$$x; \quad \frac{5}{7}; \quad 9x^5; \quad -x^3; \quad -\frac{1}{4}x^4; \quad -2x^5; \quad 3x^2; \quad 0,2\,x; \quad -\frac{1}{7};$$

ciascheduno dei quali uguaglia il prodotto di un numero reale intero o frazionario per una potenza, ad esponente intiero positivo o nullo, della lettera x, — si ottiene il polinomio

$$7x^5 - \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 3x^2 + 1{,}2x + \frac{4}{7};$$

di *quinto grado*, giacchè il massimo esponente della lettera x è 5; *completo*, giacchè in esso non manca alcuna delle potenze di x intermedie fra la quinta e la 0; e in cui i *coefficienti* sono i numeri

$$7; \quad -\frac{1}{4}; \quad -1; \quad 3; \quad 1{,}2; \quad \frac{4}{7}.$$

2.° Sommando i termini

$$-5x^2; \quad 3; \quad -8x; \quad x^4; \quad 2x^2; \quad 2x; \quad -2; \quad 6x$$

e facendo le convenienti riduzioni, si ottiene il polinomio;

$$x^4 - 3x^2 + 1$$

di quarto grado, incompleto, i cui coefficienti sono i numeri

$$1; \quad -3; \quad 1.$$

3.° La espressione

$$x^5 - x^3\sqrt{2} + x.\pi - 3,$$

nella quale entrano per coefficienti dei numeri, come $\sqrt{2}$ e $\pi =$ rapporto della circonferenza al diametro, che sono reali bensì, ma che non possono essere misurati esattamente da intieri o da frazioni, e debbono venir limitati fra frazioni tanto vicine quanto si vuole —, si trasforma in un polinomio della stessa natura di quello precedentemente definito; allorquando, per poter far uso praticamente della medesima, è necessario sostituire ai numeri incommensurabili, che essa contiene, valori approssimati espressi con apposite frazioni, a ciascheduna delle quali venga attribuito un segno determinato ed unico, togliendo per questa guisa l'ambiguità del doppio segno, che per avventura potessero presentare alcuni dei numeri incommensurabili dati ($\sqrt{2}$ nell'esempio attuale). Così l'espressione, di cui è caso, si tramuta nell'altra

$$x^5 - 1{,}415.x^3 + 3{,}141.x - 3,$$

che è un polinomio della stessa natura di quello definito, qnando,

ricorrendo alle limitazioni

$$-1{,}415 < -\sqrt{3} < -1{,}414; \quad 3{,}141 < \pi < 3{,}1412$$

si scelgano per $\sqrt{3}$ (a cui s'attribuisce il segno —) e per π i limiti minori.

È bene notare qui una cosa, la quale tornerà spesso utile in seguito; che cioè può sempre considerarsi come completo un polinomio che non lo sia, intendendo sostituiti ai termini che mancano termini aventi le stesse potenze di x di questi mancanti, e il coefficiente ± 0. Così invece del polinomio incompleto

$$x^4 - 3x^2 + 1$$

può scriversi il completo

$$x^4 \pm 0 . x^3 - 3x^2 \pm 0 . x + 1 ;$$

il doppio segno nei termini aggiunti non porta qui alcuna ambiguità sul valor complessivo del polinomio, giacchè ciascheduno dei termini medesimi è identicamente $= 0$.

Se, nel polinomio precedentemente definito

$$a x^m + b x^{m-1} + c x^{m-2} + \ldots + j x^2 + k x + l,$$

alla lettera x si sostituisce il numero reale α, di segno determinato, positivo o negativo, o il numero complesso $\beta + \gamma' i$ (in cui β e γ' hanno segni determinati positivi o negativi), il polinomio medesimo trasformasi in un numero reale o complesso *determinato ed unico;* giacchè, per quanto si è detto, nessun coefficiente del polinomio ha doppio segno, e nelle sostituzioni, di cui è caso, occorrono esclusivamente moltiplicazioni e somme, le quali conducono a risultati unici, di segno determinato positivo o negativo, fra cui va annoverato lo zero, ma non l'∞.

Così; 1.° Il polinomio

$$2x^3 - 4x^2 - 2x + 1$$

nel caso di $x = -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3$ si trasforma nei numeri

$$-83; \quad -27; \quad -3; \quad 1; \quad -3; \quad -3; \quad +13:$$

e i risultati di queste sostituzioni possono indicarsi così:

$$(2x^3 - 4x^2 - 2x + 1)_{-3} = -83$$
$$(2x^3 - 4x^2 - 2x + 1)_0 = 1 ; \text{ ecc.}$$

Si trova eziandio:

$$\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + 1\right)_{-4} = -\frac{161}{3}$$

$$\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + 1\right)_0 = 1$$

$$\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + 1\right)_4 = \frac{119}{3}$$

$$(x^8 - 3x^5 + x^2 + 2)_{\frac{1}{2}} = \frac{1817}{256}$$

Parimenti il polinomio $x^3 + 7x + 9$, per $x =$ numero complesso $1 + i$ o suo coniugato $1 - i$, si riduce a $14 + 9i$ o al numero coniugato $14 - 9i$.

2.° Dal polinomio

$$x^3 - 4x^2 - 72x - 55$$

per

$$x = 11;$$

dal polinomio

$$27x^3 - 135x^2 + 52$$

per

$$x = 2:3;$$

da

$$x^3 - 7x + 6$$

per

$$x = 1; \quad 2; \quad -3;$$

da

$$x^6 - 4{,}5\,x^5 - 2{,}5\,x^4 + 5\,x^2 - 22{,}5\,x - 12{,}5$$

per

$$x = -0{,}5 \qquad \text{od} \qquad x = 5,$$

si ottiene sempre il risultato 0: e lo stesso risultato si ottiene eziandio da

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 6$$

per

$$x = 3; \quad 1 + i; \quad 1 - i;$$

e da

$$x^5 - 6x^4 + 13x^3 + 3x^2 - 18x + 39$$

per

$$x = 3 - 2i; \quad 3 + 2i; \text{ ecc.}$$

Il polinomio precedentemente definito, $a x^m + b x^{m-1} + \dots$, che si trasforma in numeri differenti pei differenti valori assegnati ad x, dicesi una *funzione* della lettera x, e più precisamente, — avuto riguardo alla natura delle potenze di questa lettera contenute in esso —, una funzione *intiera* e *razionale* della lettera x.

Per indicare poi uno qualsiasi dei polinomii, abbracciati tutti nella espressione generale $a x^m + b x^{m-1} + \dots$, indipendentemente dal suo grado, dal numero dei suoi termini, dal valore numerico de' suoi coefficienti, si adopera la notazione $f(x)$ (funzione di x, leggasi effe x), in cui è detto solo, che il polinomio contiene una certa lettera x, alla quale può attribuirsi quel valore numerico che si vuole (o come dicesi anche una variabile x).

Il numero in cui trasformasi $f(x)$ quando vi si faccia

$$x = \alpha \quad \text{od} \quad x = \beta + \gamma' . i$$

indicasi naturalmente con $f(\alpha)$ o $f(\beta + \gamma' i)$: cosicchè, ricorrendo ad alcuni esempii precedenti, se è

$$f(x) = x^3 + 7x + 9,$$

si ha

$$f(1 + i) = 14 + 9i:$$

se è

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 72x - 55,$$

si ha

$$f(11) = 0:$$

se è

$$f(x) = x^8 - 3x^5 + x^2 + 2,$$

si trova

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1817}{256}; \text{ ecc.}$$

Alla notazione $f(x)$ si attribuisce però un valore particolare, cioè $f(x)$ si assume a rappresentare un certo polinomio di dato grado, di dati coefficienti, ecc., solamente quando, dovendosi in uno stesso calcolo considerare contemporaneamente più polinomii, la precisione esige che si abbia una notazione speciale per ciascheduno di essi; cosicchè, indicatone uno con $f(x)$, gli altri debbano rappresentarsi con notazioni diverse, come:

$$F(x), \quad \varphi(x), \quad \psi(x), \quad \theta(x), \dots$$

Ad esempio, designato con $f(x)$ il polinomio;

$$x^6 + x^5 + x^4 - x^3 - 2x^2 - 2x - 2$$

che equivale a

$$(x^2 + 1)(x^3 - 2)(x + 1),$$

ciascheduno di questi tre fattori, deve avere una notazione speciale e così, per esempio, il primo la notazione $\varphi(x)$, il secondo la $\psi(x)$, il terzo la $\theta(x)$, e si può allora scrivere

$$f(x) = \varphi(x) \,.\, \psi(x) \,.\, \theta(x).$$

Se nel polinomio incompleto $f(x) = p\,x^q$, dove q è l'esponente intiero della lettera x e p il coefficiente numerico, si sostituiscono alla lettera medesima successivamente il numero reale positivo o negativo α e la somma, $\alpha + H$, di questo numero reale con una lettera H, si ottengono i due risultati

$$f(\alpha) = p \,.\, \alpha^q \quad f(\alpha + H) = p \,.\, (\alpha + H)^q;$$

la cui differenza è

$$f(\alpha + H) - f(\alpha) = p\,[(\alpha + H)^q - \alpha^q]:$$

e siccome q è intiero, così sviluppando colla formola del binomio

$$f(\alpha+H)-f(\alpha)=p\left[\binom{q}{1} \,.\, \alpha^{q-1}H+\binom{q}{2}\alpha^{q-2}H^2+\binom{q}{3}\alpha^{q-3}H^3+\ldots\right]$$

$$= \frac{H}{1} \,.\, q \,.\, p\,\alpha^{q-1} + \frac{H^2}{1\,.\,2} \,.\, q(q-1) \,.\, p\,\alpha^{q-2} + \ldots$$

$$+ \frac{H^3}{1\,.\,2\,.\,3}\, q(q-1)(q-2) \,.\, p\,\alpha^{q-3} + \ldots$$

La legge, secondo la quale si possono ottenere i numeri che moltiplicano le frazioni

$$\frac{H}{1}; \quad \frac{H^2}{1\,.\,2}; \quad \frac{H^3}{1\,.\,2\,.\,3}; \ldots$$

non è altra cosa se non la legge di formazione dei coefficienti nello sviluppo della potenza del binomio, astrazione fatta dai denominatori; così: il coefficente di $\frac{H}{1}$, ossia $q \,.\, p\,\alpha^{q-1}$, si deduce dalla funzione data

$$p\,x^q,$$

portando l'esponente q a moltiplicatore del p; diminuendo l'espo-

nente della lettera x di una unità;

$$q \cdot p\, x^{q-1},$$

e sostituendo α ad x in questo risultato: — il coefficiente di $\frac{H^2}{1.2}$, ossia $q(q-1) \cdot p\, \alpha^{q-2}$, si ottiene allo stesso modo dalla espressione trovata dianzi

$$q \cdot p\, x^{q-1},$$

portando il $(q-1)$ a fattore del coefficiente, abbassando l'esponente della lettera di una unità;

$$q(q-1) \cdot p\, x^{q-2}\ .$$

e sostituendo α ad x in questo risultato, — il coefficiente di $\frac{H^3}{1.2.3}$, ossia $q(q-1)(q-2) \cdot p\, \alpha^{q-3}$, si ottiene allo stesso modo dalla espressione trovata

$$q(q-1) \cdot p\, x^{q-2};$$

portando cioè il $(q-2)$ a fattore del coefficiente, abbassando l'esponente di x di una unità;

$$q(q-1)(q-2) \cdot p\, x^{q-3}$$

e sostituendo α ad x in questo risultato, ecc; la serie finisce da sè con un ultimo termine contenente la lettera x coll' esponente 0.

Così se si vuole la differenza che passa fra i risultati ottenuti da

$$f(x) = -\frac{1}{3} x^5,$$

ponendovi invece di x successivamente 1 ed $1 + H$, si stabilisca il calcolo seguente:

$$\ldots -\frac{1}{3} x^5 \qquad \left(-\frac{1}{3} x^5\right)_1 = -\frac{1}{3}$$

$$5 \cdot \overline{\frac{1}{3}} \cdot x^{5-1} = -\frac{5}{3} x^4 \qquad \left(-\frac{5}{3} x^4\right)_1 = -\frac{5}{3}$$

$$4 \cdot \overline{\frac{5}{3}} \cdot x^{4-1} = -\frac{20}{3} x^3 \qquad \left(-\frac{20}{3} x^3\right)_1 = -\frac{20}{3}$$

$$3 \cdot \overline{\frac{20}{3}} \cdot x^{3-1} = -20\, x^2 \qquad \left(-20\, x^2\right)_1 = -20$$

$$2 \cdot \overline{20} \cdot x^{2-1} = -40\, x \qquad (-40\, x)_1 = -40$$

$$1 \cdot 40 \cdot x^{1-1} = -40 \qquad \ldots \quad -40;$$

nel quale a sinistra sono contenute le espressioni generali colla lettera x e a destra i risultati della sostituzione dell'unità a questa lettera.

Si deduce quindi tosto:

$$f(1+H)-f(1)=$$

$$-\frac{5}{3}\cdot\frac{H}{1}-\frac{20}{3}\cdot\frac{H^2}{1\,.\,2}-20\frac{H^3}{1\,.\,2\,.\,3}-40\cdot\frac{H^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}-40\frac{H^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}$$

$$=\frac{-1}{3}(5H+10\,.\,H^2+10\,.\,H^3+5\,.\,H^4+H^5).$$

Se ora si considera il polinomio $f(x)$ completo e nella sua espressione più generale

$$f(x)=a\,x^m+b\,x^{m-1}+c\,x^{m-2}+\ldots,$$

ciaschedun termine di esso può ritenersi come un caso particolare del polinomio incompleto $p\,x^q$, e può dedursi da questo ponendovi successivamente, invece di p ciascun dei numeri $a, b, c, \ldots$, e invece di q, ciascheduno degli altri m, $m-1$, $m-2, \ldots$. Perciò la differenza $f(\alpha+H)-f(\alpha)$ uguaglia necessariamente la somma di sviluppi analoghi ad

$$\frac{H}{1}\cdot q\,.\,p\,\alpha^{q-1}+\frac{H^2}{1\,.\,2}\cdot q\,(q-1)\,.\,p\,\alpha^{q-2}$$

$$+\frac{H^3}{1\,.\,2\,.\,3}\cdot q\,(q-1)\,(q-2)\,.\,p\,\alpha^{q-3}+\ldots$$

ed ottenibili da questo a mezzo delle diverse ipotesi, colle quali da $p\,x^q$ si passa ad

$$a\,x^m,\quad b\,x^{m-1},\quad c\,x^{m-2},\ldots.$$

Hannosi così successivamente i risultati:

$$\frac{H}{1}\,.\,m\,.\,a\,\alpha^{m-1}\qquad+\frac{H^2}{1\,.\,2}\,.\,m\,(m-1)\,.\,a\,\alpha^{m-2}$$

$$+\frac{H^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,m\,(m-1)\,(m-2)\,.\,a\,\alpha^{m-3}+\ldots$$

$$\frac{H}{1}\,.\,(m-1)\,.\,b\,\alpha^{m-2}\qquad+\frac{H^2}{1\,.\,2}\,.\,(m-1)\,(m-2)\,.\,b\,\alpha^{m-3}$$

$$+\frac{H^3}{1\,.\,2\,.\,3}(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\,.\,b\,\alpha^{m-4}+\ldots$$

$$\frac{H}{1} \cdot (m-2) \cdot c\,\alpha^{m-3} + \frac{H^2}{1\,.\,2} \cdot (m-2)(m-3) \cdot c\,\alpha^{m-4}$$

$$+ \frac{H^3}{1\,.\,2\,.\,3}(m-2)(m-3)(m-4)\,c\,\alpha^{m-5} + \ldots$$

. . . .

e raccogliendo i fattori di

$$\frac{H}{1};\quad \frac{H^2}{1\,.\,2};\quad \frac{H^3}{1\,.\,2\,.\,3};\ldots,$$

si trovano per essi le espressioni

$$m\,.\,a\,\alpha^{m-1} + (m-1)\,b\,\alpha^{m-2}$$
$$+ (m-2)\,.\,c\,\alpha^{m-3} + \ldots,$$
$$m(m-1)\,.\,a\,\alpha^{m-2} + (m-1)(m-2)\,.\,b\,\alpha^{m-3}$$
$$+ (m-2)(m-3)\,.\,c\,\alpha^{m-4} + \ldots$$
$$m(m-1)(m-2)\,a\,\alpha^{m-3} + (m-1)(m-2)(m-3)\,.\,b\,\alpha^{m-4}$$
$$+ (m-2)(m-3)(m-4)\,.\,c\,\alpha^{m-5} + \ldots,$$

. . . .

la prima delle quali può ottenersi, partendo da

$$f(x) = a\,x^m + b\,x^{m-1} + c\,x^{m-2} + \ldots,$$

facendo per ogni termine del medesimo quanto si è fatto precedentemente per passare da $p\,x^q$ a $q\,.\,p\,x^{q-1}$; sommando i risultati, il che dà

$$m\,.\,a\,x^{m-1} + (m-1)\,.\,b\,x^{m-2} + (m-2)\,.\,c\,x^{m-3} + \ldots \qquad (*)$$

e ponendo poscia in questa espressione generale invece di x il numero α; il fattore di $\frac{H^2}{1\,.\,2}$ si trova effettuando su ciaschedun termine dell'espressione ora ottenuta (*) operazioni analoghe a quelle, per cui da $q\,.\,p\,x^{q-1}$ si passava a $q(q-1)\,.\,p\,x^{q-2}$; sommando i risultati, il che dà

$$m(m-1)\,.\,a\,x^{m-2} + (m-1)\,.\,(m-2)\,b\,x^{m-3}$$
$$+ (m-2)(m-3)\,.\,c\,x^{m-4} + \ldots, \qquad (**)$$

e ponendo α invece di x in questa espressione generale; — il fattore

di $\frac{H^3}{1.2.3}$ si ottiene facendo su ciascun termine del polinomio precedente (**) quanto si fece per passare da $q(q-1).p\,x^{q-2}$ a

$$q(q-1)(q-2).p\,x^{q-3},$$

sommando i risultati il che dà

$$m(m-1)(m-2).a\,x^{m-3}+(m-1)(m-2)(m-3).b\,x^{m-4}$$
$$+(m-2)(m-3)(m-4).c\,x^{m-5}+\dots \qquad (***)$$

e ponendo α in luogo di x in questa espressione; —. così di seguito sino alla fine.

L'espressione generale (*), i cui termini si deducono da quelli di $f(x)$ colla regola enunciata dicesi ***prima derivata*** di $f(x)$ e si indica con $f'(x)$ (leggasi effe prima x).

L'espressione (**) i cui termini si deducono da quelli di $f'(x)$ colla regola enunciata [la stessa a mezzo della quale i termini di $f'(x)$ deduconsi da quelli di $f(x)$] dicesi ***seconda derivata*** di $f(x)$ ed indicasi con $f''(x)$ (leggasi f seconda x).

L'espressione (***), i cui termini si deducono da quelli di $f''(x)$ colla regola enunciata [la stessa a mezzo della quale i termini di $f'(x)$ deduconsi da quelli di $f(x)$] dicesi ***terza derivata*** di $f(x)$ ed indicasi con $f'''(x)$ [leggasi effe terza x], ecc., la ennesima derivata (n è intermedio fra 0 ed m), dedotta dall' ($n-1$)esima colla stessa regola a mezzo della quale $f'(x)$ deducesi da $f(x)$, si indica con $f^{(n)}(x)$ [leggasi effe ennesima x].

Perciò la differenza $f(\alpha+H)-f(\alpha)$ vale

$$\frac{H}{1}f'(\alpha)+\frac{H^2}{1.2}f''(\alpha)+\frac{H^3}{1.2.3}f'''(\alpha)+\dots+\frac{H^n}{1.2\dots n}f^{(n)}(\alpha)+\dots$$

Lo sviluppo contiene evidentemente tanti termini quante sono le derivate di $f(x)$; e il numero di queste è m, giacchè, siccome, passando da una derivata alla successiva, il grado si abbassa di un' unità, così per la derivata emmesima il grado sarà $m-m$, ossia 0, e da questo punto non sarà più possibile continuare il calcolo.

Così se è dato

$$f(x)=x^4-\frac{1}{2}x^3+2x-1,$$

e si domanda la differenza

$$f(2+H)-f(2),$$

si ricorre al seguente calcolo:

$$f(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 2x - 1 \quad \ldots$$

$$f'(x) = 4x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2 \qquad f'(2) = \left(4x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2\right)_2 = 28$$

$$f''(x) = 12x^2 - 3x \qquad f''(2) = (12x^2 - 3x)_2 = 42$$

$$f'''(x) = 24x - 3 \qquad f'''(2) = (24x - 3)_2 = 45$$

$$f^{IV}(x) = 24 \qquad f^{IV}(2) = \ldots = 24$$

e si ha quindi:

$$f(2+H) - f(2) = 28\frac{H}{1} + 42 \cdot \frac{H^2}{1.2} + 45 \cdot \frac{H^3}{1.2.3} + 24 \cdot \frac{H^4}{1.2.3.4}$$

$$= 28 \cdot H + 21 \cdot H^2 + \frac{15}{2}H^3 + H^4.$$

Se nello sviluppo generale precedente, che può scriversi così:

$$f(x+H) - f(x) = \frac{f'(x)}{1} \cdot H + \frac{f''(x)}{1.2}H^2$$

$$+ \frac{f'''(x)}{1.2.3} + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{1.2.3\ldots n} \cdot H^n + \ldots$$

si attribuiscono ad H valori abbastanza piccoli, un termine qualsiasi può diventare maggiore della somma di tutti quelli che lo seguono, ossia può essere soddisfatta la disuguaglianza

$$\frac{f^{(n)}(x)}{1.2.3\ldots n} \cdot H^n > \frac{f^{(n+1)}(x)}{1.2.3\ldots(n+1)}H^{n+1} + \ldots + \frac{f^{(m)}(x)}{1.2.3\ldots m}H^m.$$

Infatti, se si indicano rispettivamente con

$$R_n, \quad R_{n+1}, \quad R_{n+2} \ldots \quad R_m$$

i numeri

$$\frac{f^{(n)}(x)}{1.2.3\ldots n}; \quad \frac{f^{(n+1)}(x)}{1.2.3\ldots(n+1)}; \quad \frac{f^{(n+2)}(x)}{1.2.3\ldots(n+2)}, \ldots \quad \frac{f^{(m)}(x)}{1.2.3\ldots m},$$

la disuguaglianza, cui si vuole soddisfare, può scriversi:

$$R_n \cdot H^n > R_{n+1}H^{n+1} + R_{n+2} \cdot H^{n+2} + \ldots + R_m \cdot H^m.$$

Ora se a ciascheduno dei numeri R_{n+1}, $R_{n+2}, \ldots$ R_m, positivi o negàtivi, e in generale diversi fra loro, si sostituisce il maggiore

fra essi, R, e se si dimostrerà che è possibile di soddisfare alla disuguaglianza modificata da queste sostituzioni, ossia alla

$$R_n H^n > R . H^{n+1} + R . H^{n+2} + \ldots + R . H^m,$$

sarà provato essere *a fortiori* possibile di soddisfare alla proposta. La disuguaglianza modificata equivale a

$$R_n H^n > R H^{n+1} (1 + H + H^2 + \ldots + H^{m-n-1}),$$

ossia a

$$R_n H^n > R . H^{n+1} \frac{1 - H^{m-n}}{1 - H},$$

od anche a

$$R_n H^n > R . \frac{H^{n+1}}{1 - H} - R \frac{H^{m+1}}{1 - H},$$

alla quale conviene un valore di H più piccolo dell'unità e precisamente

$$< \frac{R_n}{R_n + R}.$$

Infatti per $H < 1$ la espressione

$$R \frac{H^{m+1}}{1 - H}$$

è positiva, e quindi a tanto maggior ragione si soddisferà all'ultima disuguaglianza, quando si soddisfaccia alla

$$R_n H^n > R \frac{H^{n+1}}{1 - H},$$

da cui, sopprimendo, H^n

$$H < \frac{R_n}{R_n + R} \quad \text{c. d. d.}$$

Così, se dato $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$, si vuole che, nella differenza

$$f(3 + H) - f(3) = 16 . H + 7 . H^2 + H^3,$$

H assuma tale valore da far sì, che il termine $16 H$ superi la somma di tutti quelli che vengono dopo, ogni numero minor di

$$\frac{16}{7 + 16} = \frac{16}{23}$$

è in questo caso; per esempio $\frac{1}{2}$ da

$$8 > \frac{7}{4} + \frac{1}{8}.$$

Dal teorema precedente risulta pertanto che se H, in generale piccolissimo, è minore di

$$\frac{f'(x)}{f(x) + R},$$

dove R è il più grande dei numeri

$$\frac{f''(x)}{1.2};\ \frac{f'''(x)}{1.2.3};\ldots;$$

nella differenza $f(x+H) - f(x)$ il primo termine $H.f'(x)$ supera la somma di quelli che vengono dopo; talchè la differenza istessa è un numero e minore di $2Hf'(x)$, ossia piccolissimo, giacchè è tale H e per sua natura $f'(x)$ è determinato: — in conseguenza si corrispondono: una differenza piccolissima H fra due numeri posti invece di x ed una piccolissima differenza e fra i due risultati trovati per $f(x)$: — in altre parole, se invece di x si sostituiscono due numeri, distinti fra loro, ma che differiscano meno di qualunque numero assegnabile, per quanto piccolo questo possa pensarsi, sono precisamente nello stesso caso i risultati delle due sostituzioni. Posto questo, si immagini la serie dei numeri reali, compresi fra i due qualsiansi α ed α' (di cui $\alpha > \alpha'$), nella quale possa trovarsi lo 0, non l'∞. Essa contiene degli intieri, delle frazioni e dei numeri incommensurabili, non misurati cioè esattamente nè da intieri nè da frazioni, ma limitati tra frazioni tanto vicine quanto si vuole: ed è chiaro che per poter abbracciare tutti i termini possibili della medesima (termini in numero infinitamente grande), bisogna ammettere che fra due vicini qualsiansi non abbia luogo interruzione di sorta, che si passi cioè dall'uno all'altro *in modo continuo*. Una serie siffatta sarebbe necessaria, ad esempio, quando si richiedessero tutte le distanze (in numero infinitamente grande), alle quali si trova successivamente dal suolo il centro di gravità di un corpo che cade, considerato in quel tratto di cammino, percorso dalla posizione distante α dal terreno a quella distante α': a tali distanze intermedie, dall'una all'altra delle quali il detto centro passa in modo

continuo e successivo, dovrebbero corrispondere numeri, dall'uno all'altro dei quali si passa pure in modo continuo e successivo; i numeri reali tutti insomma compresi fra α ed α'. Ora se si suppone x uguale successivamente a ciascheduno di questi numeri, ogni sostituzione tramuta $f(x)$ in un numero determinato, unico, distinto da ciascheduno di quelli a cui conducono tutte le altre sostituzioni; ma però differente, meno di qualunque quantità assegnabile, da quelli ottenuti colle sostituzioni vicine; talchè, abbracciando tutti i risultati siffatti si deve dire, che $f(x)$ si trasforma così in una serie di termini (in numero infinitamente grande), dall'uno dei quali si passa al successivo in modo continuo; l'∞ (segno di indeterminazione) resta quindi di per sè escluso da questa serie, nella quale può però figurare lo zero. In questo consiste quanto chiamasi legge di continuità di $f(x)$, e suolsi enunciare così: *variando x in modo continuo da α ad α', $f(x)$ varia in modo continuo da $f(\alpha)$ ad $f(\alpha')$.* La funzione che si studia dicesi pertanto funzione *continua* della lettera x.

Siccome questa idea è capitale e costituisce il perno, attorno al quale s' aggira ciò che segue, così a completarla giova citare qui qualche espressione, che contenga la lettera x e dei numeri, ma che non sia soggetta alla legge di continuità. Per esempio l'espressione:

$$2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x - 1};$$

considerando i numeri compresi fra -1 e 2 si vede subito che per $x =$

-1,	0,	1,	2

essa è

$1/2$,	indeterminata,	indeterminata,	$3\,1/2$;

cosicchè variando x in modo continuo da -1 a 2, l'espressione non varia in modo continuo fra $1/2$ e $3\,1/2$; agli intieri 0 ed 1 essa è *indeterminata.* — Parimenti l'espressione

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

per x variabile in modo continuo da 0 a 2, non varia in modo continuo, giacchè per $x = 1$ è indeterminata, per $x > 1$ è immaginaria, ecc.

È inutile l'osservare che $f'(x)$, $f''(x)$,... sono della stessa na-

tura di $f(x)$ e quindi vanno soggetti, non meno di questa, alla legge di continuità.

Lo sviluppo

$$f(\alpha+H)=f(\alpha)+\frac{H}{1}f'(\alpha)+\frac{H^2}{1.2}f''(\alpha)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{H^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(\alpha)+\ldots,$$

che ha servito per condurre alla legge di continuità, sarà usato costantemente in seguito; notisi intanto qui che si possono scrivere sviluppi analoghi per $f'(\alpha+H)$, $f''(\alpha+H)$,...; e cioè:

$$f'(\alpha+H)=f'(\alpha)+\frac{H}{1}.f''(\alpha)+\frac{H^2}{1.2}f'''(\alpha)+\ldots$$
$$f''(\alpha+H)=f''(\alpha)+\frac{H}{1}.f'''(\alpha)+\frac{H^2}{1.2}f^{\text{iv}}(\alpha)+\ldots$$

Sovente poi per brevità invece di

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(\alpha)$$

si scriverà

$$\frac{1}{\underline{|n}}f^{(n)}(\alpha).$$

[leggasi 1 diviso fattoriale n in $f^{(n)}(\alpha)$].

CAPITOLO SECONDO.

Fra gli esempi di sostituzione di un numero alla lettera x in $f(x)$, presentati al principio del capitolo precedente, quelli raccolti sotto l'indicazione 2, si riferiscono tutti al caso speciale, in cui il risultato della sostituzione è zero. Così, ponendo invece di x il numero intiero 11, il polinomio

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 72x - 55$$

diventa

$$f(11) = 0;$$

supposto $x =$ numero complesso $1 + i$, la funzione

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 6$$

si trasforma in

$$f(1 + i) = 0.$$

Talchè, se, poste le condizioni

$$x^3 - 4x^2 - 72x - 55 = 0$$
$$x^3 - 5x^2 + 8x - 6 = 0,$$

venisse richiesto quali numeri le verifichino, si dovrebbe rispondere che sono nel caso; il numero reale 11 per la prima, e il numero complesso $1 + i$ per la seconda.

Condizioni siffatte ed altre analoghe, abbracciate tutte nella generale:

$$f(x) = a\,x^m + b\,x^{m-1} + c\,x^{m-2} + \ldots = 0$$

chiamansi *equazioni numeriche intiere e razionali ad una incognita* x; *grado* delle medesime è il grado del polinomio $f(x)$, che costituisce il loro primo membro: esse diconsi *complete* od *incomplete*, secondo che è completo od incompleto questo polinomio. Così la condizione

$$f(x) = x^3 - 7\,x + 6 = 0$$

è una equazione algebrica razionale ad una incognita x, di terzo grado, incompleta: soddisfano alla medesima i numeri 1: 2; $\bar{3}$; giacchè

$$f(1) = f(2) = f(\bar{3}) = 0:$$

— la condizione

$$f(x) = 27\,x^3 - 135\,x^2 + 52 = 0$$

è una equazione algebrica ad una incognita x, intiera e razionale incompleta di terzo grado; la frazione $\frac{2}{3}$ soddisfa alla medesima, giacchè

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = (27\,x^3 - 135\,x^2 + 52)_{\frac{2}{3}} = 0:$$

— la condizione

$$f(x) = x^5 - 6\,x^4 + 13\,x^3 + 3\,x^2 - 18\,x + 39 = 0$$

è una equazione algebrica, ad una incognita x, di quinto grado, intiera, razionale, completa: — il numero complesso $3 + 2\,i$ e il suo coniugato $3 - 2\,i$ soddisfano alla medesima, giacchè

$$f(3 + 2\,i) = f(3 - 2\,i) = 0.$$

È utile osservare qui, che quanto avviene riguardo a quest'ultimo polinomio

$$f(x) = x^5 - 6\,x^4 + \ldots,$$

annullato sì dall'uno che dall'altro dei due numeri complessi coniugati $3 + 2\,i$, $3 - 2\,i$, ha luogo in generale; che cioè, se si è verificato che uno dei due numeri complessi

$$\beta \pm \gamma' i$$

soddisfa alla condizione

$$f(x) = a\,x^m + b\,x^{m-1} + \ldots = 0,$$

può dirsi senz'altro che la medesima è soddisfatta anche dall'altro: talchè se, per esempio, risultò

$$f(\beta + \gamma' i) = 0,$$

si concluderà addirittura che è nullo anche

$$f(\beta - \gamma' i)$$

e reciprocamente.

— Infatti, affinchè sia nullo

$$f(\beta + \gamma' i),$$

è necessario che sia tale lo sviluppo

$$f(\beta) + i\gamma'.\frac{f'(\beta)}{1} - \gamma'^2\frac{f''(\beta)}{1.2} - i\gamma'^3\frac{f'''(\beta)}{1.2.3} + \ldots,$$

ottenuto, applicando ad $f(\beta + \gamma' i)$ lo sviluppo dimostrato nel precedente capitolo, ed avendo riguardo alla definizione della unità immaginaria ($i^2 = -1$), e a quelle operazioni che ne sono la conseguenza.

Lo sviluppo precedente equivale a

$$\left\{f(\beta) - \gamma'^2.\frac{f''(\beta)}{1.2} + \ldots\right\} + i\left\{\gamma'.\frac{f'(\beta)}{1} - \gamma'^3\frac{f'''(\beta)}{1.2.3} + \ldots\right\},$$

che è un numero complesso e che non può essere zero, se non sono separatamente nulle le due parti del medesimo; giacchè è assurdo, che la parte reale possa essere distrutta dalla immaginaria.

Deve essere adunque:

$$f(\beta) - \gamma'^2\frac{f''(\beta)}{1.2} + \ldots. = 0$$

$$i\left\{\gamma'.\frac{f'(\beta)}{1} - \gamma'^3\frac{f'''(\beta)}{1.2.3} + \ldots\right\} = 0,$$

ossia sottraendo

$$f(\beta) - i\gamma'.\frac{f'(\beta)}{1} - \gamma'^2.\frac{f''(\beta)}{1.2} + i\gamma'^3.\frac{f'''(\beta)}{1.2.3} + \ldots = 0,$$

ovvero

$$f(\beta - \gamma' i) = 0, \quad \text{c. d. d.}$$

È utile notare quanto chiaramente risulta dal processo di calcolo sviluppato or ora, che cioè, se

$$\beta \pm \gamma' i$$

sono numeri complessi coniugati, i risultati delle sostituzioni dei medesimi in $f(x)$ sono essi pure due numeri complessi coniugati

$$P \pm Q' i.$$

È necessario ora, lasciando gli esempi e le verifiche particolari, salire a considerazioni più generali rispetto a questo stato speciale, o, pel quale può passare $f(x)$, quando ad x si sostituiscano numeri reali o complessi.

A ciò conduce il teorema seguente, che è una conseguenza immediata del principio di continuità, e che può chiamarsi il *teorema fondamentale:*

— *Se due numeri reali* λ *e* μ, *posti invece di* x *in* $f(x)$, *conducono a due risultati* $f(\lambda)$ *ed* $f(\mu)$ *di segno opposto, fra* λ *e* μ *è compreso necessariamente un numero reale che annulla* $f(x)$, *ossia che soddisfa alla condizione*

$$f(x) = 0.$$

Infatti, per fissare le idee, suppongasi $f(\lambda)$ negativo ed $f(\mu)$ positivo; se si fa variare x in modo continuo da λ a μ, $f(x)$, pure varia in modo continuo dallo stato negativo $f(\lambda)$ al positivo $f(\mu)$; il che non potrebbe evidentemente aver luogo se $f(x)$ non passasse almeno una volta per zero; ossia se l'equazione $f(x) = 0$ non fosse soddisfatta almeno da uno dei numeri reali compresi fra λ e μ; c. d. d.: si è detto poi *almeno,* poichè evidentemeate $f(x)$ potrebbe passare dallo stato negativo $f(\lambda)$ al positivo $f(\mu)$ anche annullandosi un numero dispari di volte; come ad esempio avverrebbe se $f(x)$ di negativo che è prima, $f(\lambda)$, diventasse positivo, poscia negativo di nuovo e positivo successivamente, sino a tramutarsi nel numero $f(\mu)$; nel quale caso evidentemente i numeri che lo annullerebbero, compresi fra λ e μ, sarebbero tre; ecc.

Dal teorema superiore dipendono essenzialmente gli altri due:

Ogni equazione di grado impari è soddisfatta necessariamente da un numero reale;

Ogni equazione di grado pari lo è necessariamente da due, nel caso in cui il suo ultimo coefficiente sia negativo.

Alla dimostrazione di queste due proposizioni però occorre

premettere alcune osservazioni. — Si ricorra al procedimento che si tenne nel capitolo precedente e che condusse a concludere, come nello sviluppo

$$\ldots + R_n \,.\, H^n + R_{n+1} \,.\, H^{n+1} + R_{n+2} \,.\, H^{n+2} + \ldots,$$

ordinato secondo le potenze ascendenti della lettera H ed avente per coefficienti i numeri

$$\ldots, \quad R_n, \quad R_{n+1}, \quad R_{n+2}, \quad \ldots,$$

possa un termine qualsiasi superare la somma di quelli che lo seguono, quando H sia sufficientemente piccolo.

È evidente, che siffatta conclusione sussiste indipendentemente dai valori particolari che nella dimostrazione citata avevano i coefficienti

$$R_n, \quad R_{n+1}, \quad R_{n+2}, \quad \ldots$$

ed è da essa che si può tosto dedurre, come nel polinomio

$$f(x) = a\,x^m + b\,x^{m-1} + c\,x^{m-2} + \ldots j\,x^2 + b\,x + l,$$

il termine $a\,x^m$, quando ad x si sostituisca un numero abbastanza grande, possa superare la somma degli altri m termini. Infatti, posto

$$x = \frac{1}{z},$$

il polinomio $f(x)$ diventa:

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a\,z + b\,z^2 + c\,z^3 + \ldots + j\,z^{m-1} + k\,z^m + l\,z^{m+1}}{z^{m+1}}.$$

Ora per $z =$ numero sufficientemente piccolo, α', è, pel teorema rammentato,

$$a\,\alpha' > b\,\alpha'^2 + c\,\alpha'^3 + \ldots j\,\alpha'^{m-1} + k\,\alpha'^m + l\,\alpha'^{m+1}$$

e quindi

$$\frac{a\,\alpha'}{\alpha'^{m+1}} > \frac{b\,\alpha'^2 + c\,\alpha'^3 + \ldots + k\alpha'^m + l\,\alpha'^{m+1}}{\alpha'^{m+1}},$$

ossia

$$\frac{a}{\alpha'^{m+1}} > \frac{b}{\alpha'^{m-1}} + \frac{c}{\alpha'^{m-2}} + \ldots \frac{k}{\alpha'} + l$$

e facendo $\frac{1}{\alpha'} = \alpha$,

$$a\,\alpha^m > b\,\alpha^{m-1} + c\,\alpha^{m-2} + \ldots + k\,\alpha + l.$$

Ma alla condizione, che α' sia un numero sufficientemente piccolo, corrisponde l'altra, che α sia sufficientemente grande; dunque è vero: ecc. In conseguenza il risultato $f(\alpha)$, ottenuto ponendo un numero siffatto α invece di x in $f(x)$, ha lo stesso segno del primo tarmine $a\,\alpha^m$, ossia del primo coefficiente a, giacchè α è positivo; e lo stesso avviene per qualunque altro numero positivo maggiore di α.

Pongasi ora in $f(x)$ invece di x un numero negativo qualsiasi $-\delta$; si ha

$$f(-\delta) = a\,.\,(-\delta)^m + b\,.\,(-\delta)^{m-1} + c\,.\,(-\delta)^{m-2} + \ldots$$

Ora quando m è pari, il primo termine di $f(-\delta)$, ossia $a\delta^m$, ha lo stesso segno di a, il secondo $-b\,\delta^{m-1}$ ha segno contrario a b, ecc; ed avviene il contrario se m è dispari. Si deve quindi scrivere, ponendo in evidenza i segni,

$$\text{se } m \text{ è pari,} \quad f(-\delta) = +(a\,\delta^m - b\,\delta^{m-1} + c\,\delta^{m-2} - \ldots)$$
$$\text{se } m \text{ è dispari,} \quad f(-\delta) = -(a\,\delta^m - b\,\delta^{m-1} + c\,\delta^{m-2} - \ldots),$$

dove taluni dei coefficienti possono essere zero. Indicando con $F(x)$ la funzione

$$a\,x^m - b\,x^{m-1} + c\,x^{m-2} - \ldots,$$

è chiaro che, in forza di quanto precede, si può trovare un numero positivo ω, abbastanza grande, perchè in $F(\omega)$ il primo termine sia maggiore della somma di tutti quelli che seguono, e lo stesso abbia luogo anche in ciascheduno dei risultati analoghi, ottenuti sostituendo ad x numeri superiori ad ω. Ognuno di siffatti risultati ha pertanto sempre lo stesso segno; quello del primo termine, $a\,\omega^m$, ossia quello di a, giacchè ω^m è positivo: e siccome si ha

$$f(-\omega) = F(\omega) \quad \text{se } m \text{ è pari,}$$

ed

$$f(-\omega) = -F(\omega), \quad \text{se } m \text{ è dispari,}$$

così $f(x)$ per x uguale ad un numero negativo $-\omega$ e a tutti i numeri minori di questo presenterà lo stesso segno di a o segno opposto ad a, secondo che m sarà pari o dispari.

Si è ora in grado di dimostrare i due teoremi su enunciati.

— Se $f(x)$ è di grado dispari ed α e $-\omega$ sono i due numeri, che soddisfano alla condizione precedente, $f(\alpha)$ ha il segno di a; $f(-\omega)$ segno contrario ad a; ossia $f(\alpha)$ ed $f(-\omega)$ sono di

segno opposto; cosicchè fra $-\omega$ ed α vi è necessariamente un numero reale che annulla $f(x)$. Se $f(x)$ è di grado pari ed α e $-\omega$ sono due numeri che soddisfano alle due condizioni precedenti, $f(\alpha)$ ha il segno di a; $f(0)$ ha il segno di l [ultimo coefficiente in $f(x)$]; $f(-\omega)$ ha il segno di a; perciò se l è di segno contrario ad a, vi sono necessariamente due numeri reali fra $-\omega$ e $+\alpha$ che annullano $f(x)$: c. d. d.

Se si applica quanto precede all'equazione di grado dispari

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0,$$

deve dirsi che per la medesima esiste necessariamente un numero reale che la soddisfa, e che, siccome si ha

$$f(2) = -1 \qquad f(3) = +16,$$

così pel teorema fondamentale trovasi nel caso un numero positivo, ρ, compreso fra 2 e 3. —

È facile provare inoltre che di numeri reali positivi che annullano $f(x)$ esiste questo solo, ρ. Infatti, potendo l'equazione data scriversi così

$$\frac{2}{x^2} + \frac{5}{x^3} = 1,$$

il numero ρ è tale, che posto invece di x nell'espressione

$$\frac{2}{x^2} + \frac{5}{x^3}$$

conduce al risultato

$$\frac{2}{\rho^2} + \frac{5}{\rho^3}$$

eguale all'unità.

Ora siccome l'espressione suddetta in x contiene questa lettera esclusivamente al denominatore ed ha coefficienti tutti positivi, così un numero positivo maggiore o minore di ρ, sostituito ad x nella medesima, condurrà ad un numero necessariamente minore o maggiore di quello che si ottenne colla sostituzione di ρ ad x, ossia minore dell'unità: e in conseguenza, con tale sostituzione, non potrà più aver luogo l'identità del primo membro al secondo; ossia nessun membro positivo diverso da ρ annulla $f(x)$, c. d. d.

Questa unica radice positiva, ρ, è compresa fra 2 e 3, ossia per essa vale la limitazione negli intieri

$$2 < \rho < 3.$$

Ma si verifica facilmente anche:

$$f(2{,}0) = -1 \qquad f(2{,}1) = +0{,}061$$
$$f(2{,}09) = -0{,}050671 \qquad f(2{,}10) = +0{,}061$$
$$f(2{,}094) = -0{,}006153 \qquad f(2{,}095) = +0{,}005007$$
$$f(2{,}0945) = -0{,}000574 \qquad f(2{,}0946) = +0{,}000541, \text{ ecc.},$$

e questi risultati, in forza del teorema fondamentale, autorizzano a scrivere pel numero medesimo le altre limitazioni (nei decimi, nei centesimi, nei millesimi, nei decimillesimi):

$$2{,}0 < \rho < 2{,}1$$
$$2{,}09 < \rho < 2{,}10$$
$$2{,}094 < \rho < 2{,}095$$
$$2{,}0945 < \rho < 2{,}0946,$$

dalle quali risulta che, volendosi ad esempio la misura di ρ in centesimi, si deve dire che essa è più di 2,09 e meno di 2,10; in millesimi, che essa è più di 2,094 e meno di 2,095, ecc.

S'osservi qui intanto che mentre i numeri, fra cui ρ è compreso, vanno accostandosi senza limite, ossia mentre le differenze

$$3 - 2 = 1$$
$$2{,}1 - 2 = 0{,}1$$
$$2{,}10 - 2{,}09 = 0{,}01$$
$$2{,}095 - 2{,}094 = 0{,}001$$
$$2{,}0946 - 2{,}0945 = 0{,}0001$$

vanno man mano impicciolendosi, i risultati delle sostituzioni di questi numeri in $f(x)$ (scritti superiormente) si avvicinano illimitatamente allo zero.

Siano ora in generale

$$\begin{matrix} r_1 & R_1 \\ r_2 & R_2 \\ r_3 & R_3 \\ \cdots & \cdots \end{matrix}$$

coppie di numeri reali, tali che le differenze

$$R_1 - r_1$$
$$R_2 - r_2$$
$$R_3 - r_3$$
$$\cdots \quad \cdots$$

man mano decrescenti, diventino tanto piccole quanto si vuole, mentre i risultati

$$\begin{array}{ll} f(r_1) & f(R_1) \\ f(r_2) & f(R_2) \\ f(r_3) & f(R_3) \\ \ldots & \ldots \end{array}$$

s'accostano senza limite allo zero; e venga provato che in questi intervalli rimane sempre compreso un numero ρ, pel quale $f(x)$ si annulla, e per cui valgono le limitazioni

$$\begin{array}{c} r_1 < \rho < R_1 \\ r_2 < \rho < R_2 \\ r_3 < \rho < R_3 \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Potrà accadere, che in una delle successive sostituzioni ad x dei numeri r ed R, per esempio in quella di r, si ottenga il risultato $f(r)$ identicamente uguale a zero, allora ρ avrà una misura esatta, che sarà precisamente questo numero r: tale è il caso di alcune fra le verifiche esposte sul principio del presente capitolo. Ma più generalmente avverrà, che per quanto si proceda nelle sostituzioni, con numeri r ed R man mano differenti, si trovi pur sempre una limitazione

$$r < \rho < R$$

in cui i limiti R e r, vicinissimi, rimangano diversi fra loro di tanto poco quanto si vuole: sarà questo il caso generale in cui ρ sia un numero, la cui misura non possa essere espressa se non approssimativamente (un numero come $\sqrt{2}$, π, sen $13°$, log 5, ecc.). Arrestandosi allora alla limitazione

$$r < \rho < R,$$

si potrà prendere per misura di ρ il numero N formato dalle cifre comuni ad r e ad R e scrivere $\rho = N$; $f(N)$ non sarà zero, ma un numero piccolissimo, η: e l'avere adottato per misura di ρ il numero precedente equivarrà ad ammettere che nel valore di ρ è sufficiente l'approssimazione data dall'ultima cifra decimale di N, o nel valore di $f(\rho)$ tollerabile l'errore, che considera η uguale a 0. — Si distingua qui nettamente il numero ρ dalla sua misura N: $f(\rho)$ è uguale a zero; ma ad asserire ciò, non si è condotti in generale, dal

concetto di verificazione, come avveniva in alcuni casi particolari: è un criterio diverso, (la legge di continuità, il teorema fondamentale) che assicura l'esistenza di tale numero; $f(N)$ non è zero, e può darsi che non lo sia mai per quanto grande approssimazione si addotti nel calcolo di N: è lo stesso del quadrato di $\sqrt{2}$; il quadrato di $\sqrt{2}$ è 2: ma a questa conclusione non conduce un processo di verificazione, giacchè per quanta approssimazione si adottasse nel calcolo di $\sqrt{2}$, il numero ottenuto innalzato al quadrato non riprodurrebbe mai 2. — Questo numero ρ che annulla $f(x)$ o che soddisfa alla equazione

$$f(x) = 0,$$

dicesi ***radice reale*** di questa equazione, e la sua misura si ottiene generalmente con quanta approssimazione si vuole a mezzo di una limitazione.

Considerazioni analoghe valgono per una espressione complessa $\sigma + \tau i$, se questa annulla $f(x)$. Riprendasi perciò l'equazione

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$$

e si cerchi se è possibile di trovare due grandezze reali σ e τ, tali che l'aggregato $\sigma + \tau i$ annulli $f(x)$, ossia tali che si abbia

$$(\sigma + \tau i)^3 - 2(\sigma + \tau i) - 5 = 0,$$

ovvero

$$\sigma^3 - 3\sigma.\tau^2 - 2\sigma - 5 + (3\sigma^2 - \tau^2 - 2)\tau.i = 0.$$

Questa condizione non è soddisfatta se non quando lo sono separatamente le due:

$$\sigma^3 - 3\sigma.\tau^2 - 2.\sigma - 5 = 0$$
$$\tau(3\sigma^2 - \tau^2 - 2) = 0,$$

la seconda delle quali si spezza nelle altre

$$\tau = 0$$
$$3\sigma^2 - \tau^2 - 2 = 0,$$

di cui la prima non va considerata, giacchè, se $\tau = 0$, il risultato che si ottiene non è più complesso.
Resta pertanto il sistema:

$$\begin{cases} \sigma^3 - 3\sigma.\tau^2 - 2.\sigma - 5 = 0 \\ 3.\sigma^2 - \tau^2 - 2 = 0, \end{cases}$$

ossia

$$(*) \begin{cases} \tau^2 = 3 \cdot \sigma^2 - 2 \\ 8 \cdot \sigma^3 - 4 \cdot \sigma + 5 = 0. \end{cases}$$

Se nella seconda delle equazioni (*) si scrive $\sigma = -\sigma_1$, essendo σ_1 positivo, si trova:

$$0 = F(\sigma_1) = 8 \cdot \sigma_1^3 - 4 \cdot \sigma_1 - 5.$$

Questa equazione ha necessariamente una radice positiva compresa fra 1 e 2; giacchè

$$F(1) = -1; \quad F(2) = +51$$

ed ha una sola di radici siffatte, giacchè essa può scriversi così:

$$\frac{4}{\sigma_1^2} + \frac{5}{\sigma_1^3} = 8;$$

e alla medesima posta sotto questa forma è applicabile il ragionamento fatto dianzi per l'equazione

$$\frac{2}{x^2} + \frac{5}{x^3} = 1.$$

Si verifica facilmente che, oltre ad

$$F(1) = -1 \qquad F(2) = +51$$

è anche

$$F(1{,}0) = -1, \qquad F(1{,}1) = +1{,}248;$$
$$F(1{,}04) = -0{,}161088, \qquad F(1{,}05) = +0{,}061000;$$
$$F(1{,}047) = -0{,}006153), \qquad F(1{,}048) = +0{,}016180;$$

quindi sussistono per la grandezza cercata le limitazioni

$$1 < \sigma_1 < 2$$
$$1{,}0 < \sigma_1 < 1{,}1$$
$$1{,}04 < \sigma_1 < 1{,}05$$
$$1{,}047 < \sigma_1 < 1{,}048$$

e conseguentemente pel numero negativo $\sigma = -\sigma_1$ le altre

$$-2 < \sigma < -1$$
$$-1{,}1 < \sigma < -1{,}0$$
$$-1{,}05 < \sigma < -1{,}04$$
$$-1{,}048 < \sigma < -1{,}047$$

I numeri corrispondenti che misurano approssimativamente τ si deducono dai precedenti, per mezzo della formola

$$\tau^2 = 3 \cdot \sigma^2 - 2,$$

e si ha successivamente

$$\tau = \pm \sqrt{10} = \pm 3{,}162\ldots; \qquad \tau = \pm \sqrt{1} = \pm 1$$
$$\tau = \pm \sqrt{1{,}63} = \pm 1{,}276\ldots; \qquad \tau = \pm \sqrt{1} = \pm 1$$
$$\tau = \pm \sqrt{1{,}3075} = \pm 1{,}1434\ldots; \qquad \tau = \pm \sqrt{1{,}2448} = \pm 1{,}1157$$
$$\tau = \pm \sqrt{1{,}294912} = \pm 1{,}13794\ldots; \qquad \tau = \pm \sqrt{1{,}288627} = \pm 1{,}13517\ldots$$

Ad un unico numero σ corrispondono perciò due valori, τ, uguali opposti, ossia per ogni numero σ si debbono considerare due casi; quello in cui τ è positivo ed uguale a $+\tau'$, e quello in cui esso è negativo ed uguale a $-\tau'$.

Nel primo caso i termini delle limitazioni per $\sigma + \tau' i$ sono

$$-2 + 4i \qquad -1 + i$$
$$-1{,}1 + 1{,}3\,i \qquad -1{,}0 + i$$
$$-1{,}05 + 1{,}15\,i \qquad -1{,}04 + 1{,}11\,i$$
$$-1{,}048 + 1{,}138\,i \qquad -1{,}047 + 1{,}135\,i;$$

ogni coppia dei quali (lo si noti chiaramente) forma *due limitazioni distinte;* e cioè, *prima limitazione*, quella relativa al numero reale σ; *seconda limitazione*, l'altra relativa al numero immaginario $\tau' i$; per la prima il termine a sinistra è minore di quello a destra, per la seconda avviene l'opposto; ed in quest'ultima per termine a sinistra si è preso fra i numeri τ' trovati poc'anzi quello che conveniva al caso, dopo averne aumentata però di una unità l'ultima cifra decimale, onde essere certi che il limite scelto era veramente maggiore di τ'; così invece di 3,162 si è scritto 4; invece di 1,276 si è scritto 1,3, e così di seguito.

I numeri complessi precedenti sono tali che sottraendo i due che stanno nella stessa linea, nelle differenze che si ottengono

$$1 - 3\,i$$
$$0{,}1 - 0{,}3\,i$$
$$0{,}01 - 0{,}04\,i$$
$$0{,}001 - 0{,}003\,i$$

le due parti (la reale cioè e la immaginaria) vanno man mano impicciolendosi e avvicinandosi a zero.

Di più risulta provato da tutto quanto precede, che fra le parti dei termini predetti trovansi limitate le parti σ e $\tau' i$ di un aggregato che annulla $f(x)$; talchè i risultati delle sostituzioni dei termini stessi in $f(x)$, ossiano

$87 - 24i$	$-1 + 0i$
$1{,}446 - 0{,}078\,i$	$-1 + 0i$
$0{,}108250 - 0{,}017250\,i$	$-0{,}200712 + 0{,}014097\,i$
$0{,}016595 - 0{,}000150\,i$	$-0{,}007416 + 0{,}000456\,i$

constano di parti, le quali separatamente s'avvicinano senza limite allo zero.

In secondo luogo, nel caso di τ negativo ed $= -\tau'$, si trovano pei termini delle limitazioni, per le differenze fra essi due a due, pei risultati delle loro sostituzioni in $f(x)$ le seguenti serie di risultati:

Termini delle limitazioni.

$-2 - 4i$	$-1 - i$
$-1{,}1 - 1{,}3\,i$	$-1 - i$
$-1{,}05 - 1{,}15\,i$	$-1{,}04 - 1{,}11\,.\,i$
$-1{,}048 - 1{,}138\,i$	$-1{,}047 - 1{,}135\,.\,i.$

Differenze.

$$1 + 3i$$
$$0{,}1 + 0{,}3\,i$$
$$0{,}01 + 0{,}04\,i$$
$$0{,}001 + 0{,}003\,i$$

Risultati delle sostituzioni in $f(x)$.

$87 + 24i$	$-1 - 0\,.\,i$
$1{,}446 + 0{,}078\,.\,i$	$-1 - 0\,.\,i$
$0{,}108250 + 0{,}017250\,.\,i$	$-0{,}200712 - 0{,}014097\,i$
$0{,}016595 + 0{,}000150\,.\,i$	$-0{,}007416 - 0{,}000456\,i.$

È da notarsi che i termini delle limitazioni sono rispettivamente i complessi coniugati dei termini delle limitazioni precedenti; e che

in conseguenza è così anche rispettivamente delle differenze e dei risultati delle sostituzioni.

Dall'assieme del calcolo poi è pure provato che fra i termini delle limitazioni precedenti esiste un numero complesso $\sigma - \tau' i$ che annulla $f(x)$.

Siano ora in generale:

$$\begin{array}{ll} s_1 + t_1 i & S_1 + T_1 i \\ s_2 + t_2 i & S_2 + T_2 i \\ s_3 + t_3 i & S_3 + T_3 i \\ \cdots & \cdots \end{array}$$

coppie di numeri complessi tali che le differenze

$$\begin{array}{l} S_1 - s_1 + (T_1 - t_1)\, i \\ S_2 - s_2 + (T_2 - t_2)\, i \\ S_3 - s_3 + (T_3 - t_3)\, i \end{array}$$

risultino l'aggregato di parti (reali ed immaginarie), le quali individualmente si impicciolisc ano avvicinandosi a zero, e risulti provato che negli intervalli sempre più piccoli

$$\begin{array}{l} S_1 - s_1 \\ S_2 - s_2 \\ S_3 - s_3 \\ \cdots \end{array}$$

delle parti reali è sempre compreso un numero σ; negli intervalli sempre più piccoli

$$\begin{array}{l} (T_1 - t_1)\, i \\ (T_2 - t_2)\, i \\ (T_3 - t_3)\, i \\ \cdots \end{array}$$

delle parti immaginarie è compreso il numero τi, e che l'aggregato $\sigma + \tau i$ annulla $f(x)$, cosicchè i risultati

$$\begin{array}{ll} f(s_1 + t_1 i) & f(S_1 + T_1 i) \\ f(s_2 + t_2 i) & f(S_2 + T_2 i) \\ f(s_3 + t_3 i) & f(S_3 + T_3 i) \\ \cdots & \cdots \end{array}$$

siano numeri complessi, le cui parti si avvicinano senza limite a zero — il numero $\sigma + \tau i$, la cui proprietà è di annullare $f(x)$ e la

cui misura è data da una qualunque delle limitazioni precedenti, per esempio da quella i cui termini sono:

$$s + ti \qquad S + Ti$$

è uua radice complessa di $f(x) = 0$. Siccome se si suppone t negativo e T negativo i risultati delle sostituzioni in $f(x)$ sono complessi coniugati di quelli ottenuti supponendo t e T positivi, così è certo che nell'aggregato $\sigma + \tau i$ si può considerare τ come positivo e come negativo, uguale cioè a $\pm \tau'$, e ciò corrispondentemente allo stesso valore σ; ossia è certo che sono concomitanti le due radici complesse coniugate.

Gli esempi dati sul principio, nei quali la sostituzione di un numero complesso ad x in $f(x)$ conduceva a risultati $= 0$, non sono che casi speciali delle osservazioni precedenti, casi cioè in cui il calcolo di sostituzione conduceva a trovare un numero complesso, che posto invece di x in $f(x)$ annullava questo polinomio.

Se ρ *è radice dell'equazione*

$$f(x) = 0,$$

la funzione

$$f(x) = a\, x^m + b\, x^{m-1} + c\, x^{m-2} + \ldots$$

è divisibile per $x - \rho$.

Infatti, incominciando questa divisione, si ottengono i primi termini del quoziente:

$$\varphi(x) = a\, x^{m-1} + (b + a\rho)\, x^{m-2} + (c + b\rho + a\rho^2)\, x^{m-3} + \ldots$$

che è un polinomio della stessa natura di $f(x)$, ma di grado minore d'una unità. Siccome in $\varphi(x)$ le potenze di x vanno man mano decrescendo a partire dalla $(m - 1)^{esima}$, così, continuando la divisione, si ottiene un termine, nel quale entra la potenza 0 della lettera x, ossia un termine indipendente da x; fatta la moltiplicazione relativa a quest'ultimo termine e la sottrazione successiva, si trova in generale un resto R numerico, che non contiene cioè la lettera ordinatrice, e pel quale si ha identicamente

$$R = f(x) - (x - \rho)\, \varphi(x).$$

Suppongasi in questa identità $x = \rho$; R non cambia, giacchè non contiene x; $f(x)$ diventa $f(\rho)$; $x - \rho$ s'annulla, $\varphi(x)$ diventa un numero determinato $\varphi(\rho)$; e si ha

$$R = f(\rho),$$

ossia

$$R = 0$$

giacchè ρ è radice di $f(x) = 0$; c. d. d. —. Lo stesso teorema vale per la radice complessa

$$\sigma + \tau i$$

di $f(x) = 0$. Infatti, dividendo $f(x)$ per la espressione

$$x - (\sigma + \tau i)$$

si ottiene il polinomio

$$a x^{m-1} + [b + a(\sigma + \tau i)] x^{m-2} +$$
$$+ [c + b(\sigma + \tau i) + a(\sigma + \tau i)^2] x^{m-3} + \ldots,$$

ordinato esso pure per le potenze della lettera x e che differisce dal polinomio precedente $\varphi(x)$ solamente nella natura dei diversi coefficienti di x, che qui sono numeri complessi: però sul medesimo si possono ripetere i ragionamenti fatti sopra $\varphi(x)$ ed arrivare alla medesime conclusioni; che cioè il resto della divisione di $f(x)$ per $x - (\sigma + \tau i)$ è il risultato ottenuto ponendo in $f(x)$, in luogo di x, l'aggregato $\sigma + \tau i$, ossia 0.

Ed è evidente, che in questo aggregato, $\sigma + \tau i$, deve considerarsi τ tanto positivo, quanto negativo; cioè $= \pm \tau'$; ossia $f(x)$ è divisibile tanto per

$$x - (\sigma + \tau' i),$$

quanto per

$$x - (\sigma - \tau' i),$$

divisibile quindi per

$$(x - \sigma)^2 + \tau'^2.$$

È appena necessario notare, che questa divisibilità di $f(x)$ per $x - \rho$, o per

$$x - (\sigma + \tau i)$$

va intesa nello stesso senso, che fu dato all'annullarsi di $f(x)$ per $x = \rho$; anzi non si tratta che di una sola ed identica cosa; giacchè il resto della divisione attuale vale appunto $f(\rho)$ o $f(\sigma + \tau i)$, ed è identicamente nullo pei numeri ρ e $\sigma + \tau i$; ma sarà generalmente diverso da zero per le misure che verranno assunte per tali numeri.

I. L' equazione

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 72x - 55 = 0.$$

ha per radice 11, giacchè

$$f(11) = 0:$$

dunque $f(x)$ deve essere divisibile per $x - 11$; eseguendo la divisione si trova infatti:

$$x^2 + 7x + 5$$

per quoziente esatto, e si ha conseguentemente

$$f(x) = (x - 11)(x^2 + 7x + 5);$$

cosicchè, per soddisfare alla equazione data, basta soddisfare alle due

$$\begin{cases} x - 11 = 0 \\ x^2 + 7x + 5 = 0; \end{cases}$$

la prima delle quali riproduce 11, la seconda equivale a

$$(x + 3{,}5)^2 = 7{,}25$$

donde

$$x = -3{,}5 \pm \sqrt{7{,}25} = -6{,}2; -0{,}8;$$

altri due numeri, radici della proposta.

II. L'equazione

$$f(x) = x^3 - 7x + 6$$

ha per radice -3: dunque il polinomio $f(x)$ deve essere divisibile per

$$x - \overline{3} = x + 3;$$

si trova infatti:

$$x^3 - 7x + 6 = (x + 3)(x^2 - 3x + 2);$$

cosicchè si soddisfa alla proposta, scrivendo le due condizioni:

$$\begin{cases} x + 3 = 0 \\ x^2 - 3x + 2 = 0; \end{cases}$$

delle quali la prima riproduce la radice -3 e la seconda equivale a

$$(x - 1{,}5)^2 = 0{,}25,$$

donde

$$x = 1 \text{ ed } x = 2;$$

ossia

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2),$$

e finalmente

$$x^3 - 7x + 6 = (x - 1)(x - 2)(x + 3):$$

i numeri $1, 2, \overline{3}$ sono tre radici di

$$x^3 - 7x + 6 = 0.$$

III. L'equazione

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 6 = 0$$

ha per radice $1 + i$; dunque essa è divisibile per

$$x - (1 + i);$$

si trova infatti il quoziente

$$x^2 - (4 - i)x + 3(1 - i),$$

e il resto 0; e può scriversi

$$f(x) = [x - (1 + i)][x^2 - (4 - i)x + 3(1 - i)] = 0;$$

la proposta è soddisfatta adunque dalle condizioni

$$\begin{cases} x - (1 + i) = 0, \\ x^2 - (4 - i)x + 3(1 - i) = 0; \end{cases}$$

la prima delle quali riproduce

$$x = 1 + i;$$

mentre alla seconda conviene

$$x = 1 - i.$$

Si trova

$$x^2 - (4 - i)x + 3(1 - i) = [x - (1 - i)](x - 3):$$

perciò la proposta equivale a

$$0 = f(x) = (x - 3) \cdot [x - (1 + i)][x - (1 - i)];$$

e sotto questa forma si vede immediatamente che sono sue radici

$$x = 3$$

$$x = 1 \pm i.$$

Nella trasformazione precedente ai due fattori complessi di 1° grado può sostituirsi un fattore reale di 2° e si ha:

$$f(x) = (x - 3)(x^2 - 2x + 2).$$

IV. L'equazione

$$f(x) = x^6 - 4{,}5 . x^5 - 2{,}5 . x^4 + 5 . x^2 - 22{,}5 . x - 12{,}5 = 0,$$

è soddisfatta da $x = -0{,}5$; $f(x)$ è quindi divisibile per

$$x - \overline{0{,}5} = x + 0{,}5;$$

e si trova per quoziente esatto:

$$x^5 - 5x^4 + 5x - 25.$$

Pertanto alla condizione proposta possono sostituirsi le altre due

$$x + 0{,}5 = 0$$
$$x^5 - 5x^4 + 5x - 25 = 0;$$

delle quali la prima riproduce $-0{,}5$; la seconda equivale a

$$0 = x^4(x - 5) + 5(x - 5) = (x^4 + 5)(x - 5);$$

e la equazione data può scriversi quindi;

$$0 = f(x) = (x + 0{,}5) . (x - 5) . (x^4 + 5).$$

Al secondo fattore $x - 5$ corrisponde la radice 5; alla condizione

$$x^4 + 2 = 0,$$

ossia

$$x^4 = -5; \quad (x^2)^2 = -5, \text{ ecc.}$$

non corrisponde alcuna radice reale.

V. L'equazione

$$f(x) = x^5 - 7x^4 + 16x^3 - 8x^2 - 16x + 16 = 0$$

ammette la radice -1, giacchè

$$f(-1) = 0;$$

perciò $f(x)$ è divisibile per

$$x - \overline{1} = x + 1$$

e si trova per quoziente esatto

$$x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16,$$

ossia

$$(x-2)^4;$$

talchè la proposta equivale a

$$0 = f(x) = (x+1)(x-2)^4;$$

e invece della medesima si possono scrivere le condizioni

$$\begin{cases} x+1=0 \\ (x-2)^4=0; \end{cases}$$

ossia, siccome

$$(x-2)^4 = (x-2).(x-2).(x-2).(x-2),$$

le altre

$$\begin{aligned} x+1&=0, \\ x-2&=0, \\ x-2&=0, \\ x-2&=0, \\ x-2&=0: \end{aligned}$$

talchè la proposta ha le radici

$$-1; \quad 2; \quad 2; \quad 2; \quad 2:$$

ossia la radice -1 e quattro radici uguali tra loro, ed uguale ciascheduna a 2.

VI. L'equazione

$$f(x) = x^5 - 6x^4 + 13x^3 + 3x^2 - 18x + 39 = 0$$

ha per radice tanto il numero complesso $3+2i$, quanto il suo coniugato $3-2i$; quindi $f(x)$ è divisibile per

$$x-(3+2i)$$

e dà per quoziente

$$x^4 - (3-2i)x^3 + 3x - 3(3-2i); \qquad (*)$$

$f(x)$ è divisibile per

$$x-(3-2i)$$

e dà per quoziente

$$x^4 - (3 + 2i)x^3 + 3x - 3(3 + 2i): \qquad (**)$$

il quoziente (*) è divisibile per $x - (3 - 2i)$; il quoziente (**) per $x - (3 + 2i)$; per entrambe queste due nuove divisioni il nuovo quoziente è $x^3 + 3$ e si trova definitivamente

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^3 + 3) \cdot [x - (3 + 2i)][x - (3 - 2i)] \\ &= (x^3 + 3) \cdot (x^2 - 6x + 13). \end{aligned}$$

Etc.

Generalizzando ora tutto quanto precede, se per l'equazione generale di grado m,

$$f(x) = 0,$$

si trova la radice reale ρ, dividendo $f(x)$ per $x - \rho$ si ottiene un quoziente esatto $\varphi(x)$,

$$f(x) = (x - \rho) \cdot \varphi(x);$$

e invece della condizione data si possono scrivere le due

$$\begin{cases} x - \rho = 0 \\ \varphi(x) = 0; \end{cases}$$

la prima delle quali riproduce la radice ρ; la seconda, $\varphi(x) = 0$, è una equazione di grado $m - 1$, cui può convenire la radice ρ'; $\varphi(x)$ allora è divisibile per $x - \rho'$ e si ha, indicando con $\psi(x)$ il quoziente di tale divisione,

$$\varphi(x) = (x - \rho') \cdot \psi(x);$$

cosicchè alla condizione $\varphi(x) = 0$ si possono sostituire le altre due

$$\begin{cases} x - \rho' = 0, \\ \psi(x) = 0: \end{cases}$$

la prima delle quali riproduce la radice ρ'; la seconda è una equazione di grado $m - 2$, che può avere una radice reale ρ''; indicando pertanto con $\theta(x)$ il quoziente della divisione di $\psi(x)$ per $x - \rho''$, si ha

$$\psi(x) = (x - \rho'')\,\theta(x);$$

cosicchè alla condizione

$$\psi(x) = 0$$

possono sostituirsi le altre due

$$\begin{cases} x - \rho'' = 0 \\ \theta(x) = 0 \end{cases}$$

ecc.; e così di seguito sino ad un quoziente $\varpi(x)$, pel quale non possa trovarsi alcun numero reale che lo annulli.

Risalendo allora con sostituzioni successive sino ad $f(x)$, si trova

$$f(x) = (x - \rho) \cdot (x - \rho') \cdot (x - \rho'') \ldots \varpi(x);$$

e alla condizione $0 = f(x)$ possono sostituirsi le altre

$$\begin{cases} x - \rho = 0, \\ x - \rho' = 0, \\ x - \rho'' = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \varpi(x) = 0. \end{cases}$$

Pertanto i numeri ρ, ρ', ρ'', ... somministrati dal calcolo precedente, sono radici reali di $f(x) = 0$, e si può provare *che non esiste alcun numero reale, diverso da questi, che annulli* $f(x)$.

Infatti, perchè potesse essere

$$f(\zeta) = 0,$$

essendo ζ un numero reale non compreso fra quelli ottenuti dianzi, dovrebbe aversi in forza della decomposizione superiore

$$(\zeta - \rho) \cdot (\zeta - \rho') \cdot (\zeta - \rho'') \ldots \varpi(\zeta) = 0,$$

ossia dovrebbe essere verificata una delle condizioni

$$\begin{cases} \zeta - \rho = 0, \\ \zeta - \rho' = 0, \\ \zeta - \rho'' = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \varpi(\zeta) = 0: \end{cases}$$

ma nessuna di queste condizioni può essere soddisfatta; non lo può alcuna delle prime, giacchè ζ è supposto diverso e da ρ e da ρ' e da ρ''...; non lo può l'ultima, giacchè si spinse il calcolo prece-

dente sino ad un polinomio $\varpi(x)$, pel quale non fosse possibile trovare un numero reale che lo annullasse; perciò ζ non può essere una nuova radice; c. d. c.

Cosicchè *ad ogni radice reale* ρ *di* $f(x) = 0$ *corrisponde in* $f(x)$ *un fattore* $x - \rho$; *ad ogni fattore* $x - \rho$ *in* $f(x)$ *corrisponde una radice* ρ *di* $f(x) = 0$; e in conseguenza *il numero delle radici reali di* $f(x) = 0$ *può essere uguale al più al numero dei fattori di primo grado, in cui può venir decomposto il polinomio* $f(x)$, *ossia ad* m, *grado di* $f(x)$.

Un ragionamento analogo vale per le radici complesse, riguardo alle quali si può concludere, che *per ogni copia*

$$\sigma \pm \tau' i$$

di radici siffatte si hanno in $f(x)$ *i due fattori complessi di primo grado*

$$x - (\sigma + \tau' i) \quad \text{e} \quad x - (\sigma - \tau' i)$$

o il fattore di secondo grado

$$(x - \sigma)^2 + \tau'^2;$$

e ad ogni fattor reale di secondo grado di questa forma in $f(x)$ *corrispondono due radici coniugate di* $f(x) = 0$. Perciò se m è pari, $f(x) = 0$ potrà avere anche m radici complesse; ma non ne potrà avere più di $m - 1$, se m è impari.

In generale adunque *l'equazione* $f(x) = 0$ *di grado* m *potrà avere* $2n$ *radici complesse, coniugate due a due, e* p *reali se* $p + 2n$ *non supera* m.

Così, ad esempio, nello studio precedentemente fatto dell'equazione

$$x^3 - 2x - 5 = 0,$$

si verificò che essa ha una radice reale ρ, tale che

$$2{,}0945 < \rho < 2{,}0946;$$

e ne ha due complesse, per le quali i termini delle ultime limitazioni considerate erano

$$-1{,}048 \pm 1{,}138\, i \qquad -1{,}047 \pm 1{,}135\, i.:$$

— la proposta quindi, per quanto si è detto ora, non può avere altre radici oltre queste tre.

È appunto in generale la ricerca delle limitazioni rispettive per ciascheduna delle radici ρ, ρ', ρ''...., le quali soddisfano alla

condizione $f(x) = 0$, che forma l'oggetto di quanto segue; rispetto agli aggregati $\sigma + \tau i$, basterà avere provato, che essi possono soddisfare alla relazione medesima, e che il loro numero deve essere sempre pari; di essi non si tratterà più in seguito; talchè quando talora per brevità si dirà semplicemente *radice di* $f(x) = 0$, dovrà intendersi che con ciò s'accenna ad una *radice reale*.

CAPITOLO TERZO.

Anzitutto, nello studio delle radici reali della equazione data, si libera la medesima dalle radici $= 0$, che essa può presentare, e si procede poscia sulla equazione che risulta, dopo soppressi i fattori corrispondenti a queste radici.

Ad esempio l' equazione

$$x^5 - 2x^3 + x^2 = 0$$

equivale ad

$$x^2(x^3 - 2x + 1) = 0$$

ossia

$$x \cdot x \cdot (x^3 - 2x + 1) = 0:$$

essa ammette adunque due volte la radice 0, e soppressi i fattori x, x, corrispondenti alla medesima, le considerazioni successive dovranno farsi sull' equazione

$$f(x) = x^3 - 2x + 1 = 0,$$

In base a questa osservazione *si può ammettere che l' equazione*

$$f(x) = 0,$$

che si studia, non abbia radici nulle.

In secondo luogo basta assegnare regole e procedimenti per la *ricerca* delle radici positive; giacchè *quella delle negative può*

farsi dipendere dallo studio delle positive di una nuova equazione, immediatamente ottenibile dalla proposta.

Infatti l'equazione data $f(x) = 0$ può scriversi sotto la forma

$$0 = f(x) = (x - \rho) . (x - \rho') . (x - \rho'') \ldots \varpi(x);$$

se ρ', ρ'', ... sono le sue radici reali e $\varpi(x)$ indica un polinomio, cui non annulla alcun numero reale: se in questa espressione invece di x si pone $-z$, la medesima diventa

$$0 = f(-z) = (-z - \rho) . (-z - \rho') . (-z - \rho'') \ldots \varpi(-z),$$

ossia

$$0 = f(-z) = (z + \rho) . (z + \rho') . (z + \rho'') \ldots \varpi(-z),$$

equazione in cui il primo coefficiente è positivo, o può ridursi tale cambiando tutti i segni a $\varpi(-z)$: in questo caso, del primo coefficiente positivo, la medesima si indicherà costantemente con

$$F(z) = 0.$$

È certo che essa si spezza nelle condizioni:

$$\begin{cases} z + \rho = 0, & z = -\rho, \\ z + \rho' = 0, & z = -\rho', \\ z + \rho'' = 0, & z = -\rho'', \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \varpi(-z) = 0; \end{cases}$$

ossia ammette le radici

$$-\rho, \quad -\rho', \quad -\rho'' \ldots.$$

uguali opposte alle radici di $f(x) = 0$. Siccome z è una lettera che assume valori qualsiasi, così può ora sostituirsi alla medesima la consueta lettera x; e dire che da $f(x) = 0$, cambiando x in $-x$, si può dedurre una nuova equazione

$$F(x) = 0$$

le cui radici sono rispettivamente uguali opposte alle radici della equazione data: ossia le radici positive di $f(x) = 0$ sono le negative di $F(x) = 0$, e *le negative della prima sono le positive della seconda*; cosicchè *per procedere alla ricerca delle radici negative di* $f(x) = 0$, *si cercheranno le positive di* $F(x) = 0$, *ed, ottenutele, si cambierà loro il segno.*

Si rammenti che questo è stato già fatto precedentemente, quando, ottenuta la equazione

$$8\sigma^3 - 4\sigma + 5 = 0,$$

si pose nella medesima

$$\sigma = -\sigma_1;$$

e si verificò:

$$1{,}047 < \sigma_1 < 1{,}048,$$

e quindi

$$-1{,}048 < \sigma < -1{,}047$$

Per dedurre praticamente $F(x) = 0$ da $f(x) = 0$, basta *cambiare in $f(x)$ il segno ai coefficienti delle potenze pari o delle dispari di x, secondo che il grado m di $f(x)$ è dispari o pari,* Per esempio da

$$f(x) = x^6 - 3x^5 + 7x^2 - x + 1 = 0,$$

si deduce, colla sostituzione diretta,

$$f(-x) = x^6 + 3x^5 + 7x^2 + x + 1 = 0 = F(x);$$

$F(x)$ quindi si ottiene da $f(x)$ cambiando i segni ai coefficienti delle potenze dispari di x (il grado dell'equazione è pari): da

$$f(x) = x^5 - x^4 + x^2 + 5 = 0$$

si deduce, colla sostituzione diretta,

$$f(-x) = -x^5 - x^4 + x^2 + 5 = 0,$$

ossia, mutando i segni a tutti i termini,

$$F(x) = x^5 + x^4 - x^2 - 5 = 0;$$

ed $F(x)$ si ottiene da $f(x)$ cambiando i segni ai coefficienti delle potenze pari di x (il grado dell'equazione è dispari).

Queste considerazioni permettono intanto di restringere gli studi che seguono alle *sole radici positive.*

I. *Se i coefficienti di $f(x) = ax^m + bx^{m-1} + \ldots$ sono tutti positivi, o tutti negativi, l'equazione*

$$f(x) = 0$$

non ammette nessuna radice positiva; giacchè qualunque numero positivo α posto invece di x in $f(x)$ conduce al risultato $f(\alpha)$, che è sempre positivo, nel caso dei coefficienti tutti positivi, e che è sempre negativo, nel caso dei coefficienti tutti negativi.

Può servire d'esempio la equazione

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

Etc.

II. *Se la successione dei segni, che hanno i diversi coefficienti di*

$$f(x) = ax^m + bx^{m-1} + \dots,$$

presenta un solo cambiamento (una sola variazione), l'equazione

$$f(x) = 0$$

ha necessariamente una, ed una sola, radice positiva.

Polinomi di questo genere sono, ad esempio, i due:

$$\begin{cases} f(x) = x^5 + x^4 + 5x^3 - 2x^2 - 5x - 1 \\ f(x) = -x^3 - 5x^2 + 7x + 6; \end{cases}$$

nel primo dei quali la variazione unica cade fra $+5$ e -2, nel secondo fra -5 e $+7$: essi fanno luogo alle due equazioni

$$\begin{cases} 0 = (x^5 + x^4 + 5x^3) - (2x^2 + 5x + 1) \\ 0 = (x^3 + 5x^2) - (7x + 6), \end{cases}$$

In generale pertanto la equazione

$$f(x) = 0,$$

che deve studiarsi in questo caso, può considerarsi come avente il primo coefficiente positivo e l'ultimo negativo e come esprimibile con

$$0 = \varphi(x) - \psi(x);$$

dove $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ sono due polinomi, a coefficienti tutti positivi, ordinati per le potenze discendenti di x e tali, che il grado di $\psi(x)$ è minore dell'esponente più piccolo che ha la x in $\varphi(x)$.

Una equazione siffatta ha necessariamente una radice positiva ρ; giacchè mentre per $x = 0$, $f(0) =$ ultimo termine, è negativo; per $x =$ numero sufficientemente grande α, $f(\alpha)$ ha il segno del primo coefficiente a che è positivo; dunque fra 0 ed α esiste un numero, ρ, che annulla $f(x)$. Resta a provare che ρ è l'unica radice positiva di $f(x) = 0$. Infatti se p è l'esponente più piccolo che ha la lettera ordinatrice in $\varphi(x)$, e se si divide

$$0 = \varphi(x) - \psi(x)$$

per x^p, si ottiene

$$0 = \frac{\varphi(x)}{x^p} - \frac{\psi(x)}{x^p};$$

ed è certo che, mentre in $\varphi(x):x^p$ la lettera x è contenuta nel solo numeratore, in $\psi(x):x^p$ essa è contenuta nel solo denominatore.

Ora, se si suppone

$$x=\rho,$$

deve essere

$$\frac{\varphi(\rho)}{\rho^p}=\frac{\psi(\rho)}{\rho^p};$$

ma se ad x si sostituisce un numero positivo qualsiasi ζ maggiore o minore di ρ, l'uguaglianza delle due parti

$$\frac{\varphi(x)}{x^p} \quad \frac{\psi(x)}{x^p}$$

non può più aver luogo; giacchè se per esempio è

$$\zeta>\rho,$$

la parte

$$\frac{\varphi(x)}{x^p},$$

la quale non ha che coefficienti positivi e contiene la x solamente al numeratore, si trasforma in un numero

$$\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^p} \text{ che è maggiore di } \frac{\varphi(\rho)}{\rho^p};$$

mentre la parte

$$\frac{\psi(x)}{x^p},$$

la quale non ha che coefficienti positivi e contiene la x al solo denominatore, si trasforma in un numero

$$\frac{\psi(\zeta)}{\zeta^p}, \text{ che è minore di } \frac{\psi(\rho)}{\rho^p},$$

o di

$$\frac{\varphi(\rho)}{\rho^p};$$

giacchè

$$\frac{\psi(\rho)}{\rho^p} \text{ e } \frac{\varphi(\rho)}{\rho^p}$$

sono eguali.

Pertanto

$$\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^p} \text{ e } \frac{\psi(\zeta)}{\zeta^p},$$

l'uno maggiore, l'altro minore di uno stesso numero, non possono essere uguali; e ζ non è radice della proposta.

Terrebbe la medesima conclusione anche se fosse

$$\zeta < \rho;$$

perciò il teorema è dimostrato.

Notisi qui, che si riferiscono precisamente a questo caso le due equazioni trattate nel capitolo precedente, allorchè si verificò che tanto

$$x^3 - 2x - 5 = 0,$$

quanto

$$8\sigma_1^3 - 4\sigma_1 - 5 = 0$$

avevano una radice positiva unica.

III. *Se la successione dei segni in $f(x)$ presenta più cambiamenti (più variazioni), il numero di radici positive possibili per l'equazione*

$$f(x) = 0$$

non supera il numero delle variazioni che si trovano in $f(x)$. Così nel polinomio

$$f(x) = 2x^4 - 5x^3 + 7x - 3$$

si riscontrano tre variazioni; una fra $+2$ e -5; un'altra fra -5 e $+7$; la terza fra $+7$ e -3: perciò l'equazione

$$0 = f(x) = 2x^4 - 5x^3 + 7x - 3$$

non può avere più di 3 radici positive.

Per dimostrare questa regola si osservi che se l'equazione qualsiasi $\theta(x) = 0$ ha la radice positiva ρ_1, il polinomio $\theta(x)$ va considerato come il prodotto di $x - \rho_1$ per un altro polinomio $z(x)$, della stessa natura di $\theta(x)$, ma di grado minore di una unità.

Ora siccome è lecito considerare come positivo il primo coefficiente dell'equazione $\theta(x) = 0$, così può ammettersi: — che nella successione dei segni in $z(x)$ s'incontri anzitutto — una prima serie (A) di segni tutti positivi; — che a qnesta tenga dietro una seconda serie (B) di segni tutti negativi; — che venga dopo una terza serie (C) di segni tutti positivi —, e così alternativamente, sino ad una ultima serie (L) di segni o tutti positivi, o tutti negativi; precisamente come è indicato qui sotto:

$$\underbrace{++\ldots+}_{(A)}\ \underbrace{--\ldots-}_{(B)}\ \underbrace{++\ldots+}_{(C)}\ \underbrace{--\ldots-}_{(D)}\ \ldots\ldots\ \underbrace{\pm\pm\ldots\pm}_{(L)}$$

Per semplicità di scrittura però, e senza nulla togliere alla generalità della dimostrazione che segue, si potrà limitare il numero di queste serie considerando, ad esempio, le due successioni:

$$\left.\begin{array}{l} ++\ldots+--\ldots-++\ldots+--\ldots-++\ldots+ \\ ++\ldots+--\ldots-++\ldots+--\ldots- \end{array}\right\};$$

la prima delle quali componesi di cinque serie e termina con una serie positiva, la seconda di quattro, e termina con una negativa: Per passare da $z(x)$ a $\theta(x)$ è necessario moltiplicare $z(x)$ per $x-\rho_1$, e in conseguenza combinare i segni delle due successioni precedenti coi due, $+-$, di questo binomio: tali operazioni, indipendentemente dalle lettere che entrano nei diversi termini, sono riassunte nei due schemi seguenti:

	0	1	2	3	4	
1.ª	++…+	−−…−	++…+	−−…−	++…+	
2.ª					+−	
3.ª	++…+	−−…−	++…+	−−…−	++…+	
4.ª		−−…−	++…+	−−…−	++…+	−−…−
5.ª	+……	−……	+……	−……	+……	−
	0	1	2	3	4	5

	0	1	2	3	
1.ª	++…+	−−…−	++…+	−−…−	
2.ª				+−	
3.ª	++…+	−−…−	++…+	−−…−	
4.ª		−−…−	++…+	−−…−	++…+
5.ª	+……	−……	+……	−……	+
	0	1	2	3	4

Ciascuno dei medesimi si compone di cinque linee: — nella prima linea stanno scritti in ordine i segni dei coefficienti di $z(x)$; — nella seconda quelli di $x-\rho_1$; — nella terza è indicata la successione dei segni del primo prodotto parziale

$$x\,.\,z(x);$$

successione che è identica a quella presentata da $z(x)$; — la quarta linea contiene i segni del secondo prodotto parzíale

$$-\rho_1 . z(x)$$

la successione dei quali comincia un posto a destra per rispetto alla successione in $x . z(x)$; con che i termini simili dei due prodotti parziali si trovano in colonna gli uni sotto gli altri. Nella somma di questi due prodotti, somma che non è poi altro se non $\theta(x)$, molti segni rimangono incerti sino a che non si conosce il valore dei singoli termini: però ve ne ha alcuni certi, indipendentemente da questa conoscenza, e sono quelli che corrispondono

a due + o a due —

sovrapposti nei prodotti parziali: nella linea quinta perciò trovansi indicati questi soli. Se ben si osservano tali segni certi, si vede che essi corrispondono precisamente ai primi di ogni serie nella successione $z(x)$ aggiuntone uno di più, l'ultimo a destra, contrario al segno certo immediatamente precedente. Dunque, confrontando il numero delle variazioni di $z(x)$ con quello delle variazioni di $\theta(x)$, si vede che quest' ultima funzione ne conta *almeno* una di più: e deve dirsi *almeno*, in forza dei segni intermedî incerti, i quali, se in ogni caso non possono distruggere alcuna delle variazioni ora assicurate, possono nei casi particolari introdurne qualcuna di più. — Ora se

$$\ldots \rho_3, \rho_2, \rho_1$$

sono le radici positive di $f(x) = 0$, $f(x)$ può considerarsi in generale come il prodotto di un polinomio $z(x)$, che non è annullato da alcun numero reale positivo, per

$$(x - \rho_1) . (x - \rho_2) . (x - \rho_3) \ldots$$

Moltiplicando $z(x)$ per $x - \rho_1$ si introduce nel risultato $\theta(x)$ almeno una variazione in più di quante si incontrano in $z(x)$; moltiplicando $\theta(x)$ per $x - \rho_2$ si introduce nel risultato $\psi(x)$ almeno una variazione in più di quante ne annovera $\theta(x)$, ecc.; insomma, ottenuto il risultato $f(x)$, si saranno introdotte in esso almeno tante variazioni in più di quelle che trovansi in $z(x)$, quante sono le radici reali positive di $f(x) = 0$. Cosicchè *il numero di queste radici non supera quello delle variazioni in $f(x)$; ed $f(x) = 0$ può avere al più tante radici positive quante $f(x)$ ha variazioni:* c. d. d.

Quest' ultimo teorema (regola di Descartes), che comprende come casi particolari il primo e parte del secondo, è fondamentale; esso è sempre il punto di partenza per lo studio delle radici reali di $f(x) = 0$, conduce spesso a limitarne il numero, ed in alcuni casi specialissimi anche a precisare questo numero.
Così ad esempio l' equazione

$$f(x) = 2x^3 + \frac{1}{2}x + 5 = 0$$

non ha radici positive, giacchè $f(x)$ non ha variazioni; e siccome

$$F(x) = 2x^3 + \frac{1}{2}x - 5$$

presenta un solo cambiamento di segno, così la proposta di radici negative ne ha una sola: concludendo la medesima ammette una sola radice reale. — Del pari la equazione

$$f(x) = x^9 + x^6 + 2x^4 - x + 1 = 0$$

non può avere più di due radici reali positive, giacchè $f(x)$ presenta due sole variazioni; da essa si deduce

$$F(x) = x^9 - x^6 - 2x^4 - x - 1 = 0;$$

cosicchè $f(x) = 0$ ha necessariamente una radice negativa; concludendo:

$$x^9 + x^6 + 2x^4 - x + 1 = 0$$

ha necessariamente una radice negativa: ed è possibile che per questa equazione ne esistano anche due positive, ecc.

E certo che, siccome nessuna delle radici di $f(x) = 0$ è infinitamente grande, così esistono tanti numeri positivi quanti si vogliono più grandi della massima fra le radici reali della proposta. Sia $+L$ uno di tali numeri: evidentemente fra L e 0, ossia nell'intervallo $(0 \ldots L)$, sono comprese tutte le radici reali positive di $f(x) = 0$. Perciò la conoscenza di un numero siffatto sarebbe di somma importanza; giacchè verrebbe così stabilito nella serie reale un intervallo, in cui esclusivamente dovrebbero cercarsi le radici suddette. Del pari, se L' fosse maggiore della massima fra le radici reali positive di $F(x) = 0$, nell' intervallo $(0 \ldots L')$ sarebbero comprese tutte le radici positive medesime, e in conseguenza l' intervallo $(-L' \ldots 0)$ racchiuderebbe tutte le radici negative di $f(x) = 0$: e concludendo nell' intervallo

$$(-L' \ldots L)$$

della serie reale si troverebbero tutte le radici di $f(x) = 0$. — Un numero come $+L$ dicesi *limite superiore generale* delle radici reali di $f(x) = 0$; un numero come $-L$ *limite inferiore generale* delle radici medesime. — Per trovare un numero come $+L$, data l'equazione $f(x) = 0$, si useranno le regole seguenti, che valgono necessariamente anche per la ricerca di un numero come $+L'$ per la trasformata $F(x) = 0$, e quindi per la ricerca di un limite inferiore generale $-L'$ delle radici di $f(x) = 0$.

IV. *Nel primo membro dell'equazione proposta, ridotta in modo che il coefficiente della più alta potenza di x sia uguale ad* 1, *si consideri il coefficiente negativo più grande* (*il più piccolo fra tutti i coefficienti*); — *si cambi il segno al medesimo; al numero positivo ottenuto si aggiunga l'unità; il risultato è un limite superiore delle radici reali della equazione data*: — così, ad esempio, per

$$2x^3 - 3x^2 - 2x - 14 = 0$$

ossia per

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - x - 7 = 0,$$

è limite superiore delle radici reali

$$7 + 1 = 8,$$

giacchè -7 è il coefficiente *negativo più grande*. — Infatti, se, data l'equazione.

$$0 = a x^m + b x^{m-1} + c x^{m-2} + \ldots + j x^2 + k x + l,$$

onde ridurla in modo che il coefficiente della più alta potenza di x sia 1, si divide per a; e se si indicano rispettivamente con

$$b'; \quad c'; \ldots; \quad j'; \quad k'; \quad l'$$

i rapporti

$$\frac{b}{a}; \quad \frac{c}{a}; \ldots \quad \frac{j}{a}; \quad \frac{k}{a}; \quad \frac{l}{a};$$

si ottiene

$$0 = f(x) = x^m + b'.x^{m-1} + c'.x^{m-2} + \ldots + j'.x^2 + k'.x + l'.$$

Ora se in quest'ultima, invece di x^m si pone il valore identico

$$(x-1).x^{m-1} + (x-1).x^{m-2} + (x-1).x^{m-3} + \ldots +$$
$$+ (x-1).x^2 + (x-1).x + (x-1) + 1,$$

ottenuto per mezzo della divisione

$$\frac{x^m - 1}{x - 1} = x^{m-1} + x^{m-2} + x^{m-3} + \ldots + x^2 + x + 1,$$

si ha

$$0 = f(x) = \begin{array}{r|r|r|r|r} x & x^{m-1} + x & x^{m-2} + \ldots + x & x^2 + x & x + x \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +b' & +c' & +j' & +k' & +l' \end{array}$$

Un numero positivo L_1 che, posto invece di x in $f(x)$, soddisfa alle condizioni

$$L_1 - 1 + b' > 0,$$
$$L_1 - 1 + c' > 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$L_1 - 1 + j' > 0,$$
$$L_1 - 1 + k' > 0,$$
$$L_1 - 1 + l' > 0;$$

ossia alle

$$L_1 > 1 - b',$$
$$L_1 > 1 - c',$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$L_1 > 1 - j',$$
$$L_1 > 1 - k',$$
$$L_1 > 1 - l';$$

è un limite superiore; giacchè tanto per esso, quanto per qualsiasi numero positivo maggiore, il polinomio $f(x)$ si riduce ad una somma di termini, tutti a coefficienti positivi, e non può quindi essere 0. Ma si trova in questo caso anche il numero L uguale al più grande dei risultati

$$1 - b'; \quad 1 - c'; \ldots; \quad 1 - j'; \quad 1 - k'; \quad 1 - l';$$

a quello cioè che contiene il maggiore dei numeri

$$-b'; \quad -c'; \ldots \quad -j'; \quad -k'; \quad -l'$$

rispettivamente uguali opposti ai coefficienti di $f(x)$; o, in altre parole, a quel risultato in cui figura il numero positivo uguale opposto al coefficiente ***negativo più grande*** in $f(x)$: il che è quanto dovevasi dimostrare. — Così l'equazione

$$3x^5 - 3x^3 - 9x^2 + 5x - 2 = 0$$

si scrive sotto la forma

$$0 = x^5 - x^3 - 3\,x^2 + \frac{5}{3}\,x - \frac{2}{3} = f(x).$$

Il coefficiente negativo più grande è -3, perciò

$$L = 1 + 3 = 4$$

è un limite superiore delle radici reali della medesima.

Per ottenere colla stessa regola un limite inferiorè $-L'$ si forma l'equazione:

$$0 = F(x) = x^5 - x^3 + 3\,x^2 + \frac{5}{2}\,x + \frac{2}{3},$$

nella quale il coefficiente negativo più grande è -1:

$$L' = 1 + 1 = 2$$

è un limite superiore delle radici di $F(x) = 0$, e perciò -2 è un limite inferiore delle radici di $f(x) = 0$. — Concludendo, le radici reali della proposta sono comprese nell'intervallo

$$(-2 \ldots 4).$$

V. *Si scrivano in ordine i numeri positivi ottenuti, cambiando il segno a tutti i coefficienti negativi del primo membro dell'equazione data, ridotta in modo, che il coefficiente della più alta potenza di x sia positivo; si formi il rapporto fra ciascheduno di questi numeri e la somma dei coefficienti positivi che nella equazioue data precedono quel coefficiente negativo al quale il numero considerato è uguale opposto; si aggiunga* 1 *al più grande fra tutti questi rapporti: il risultato è un limite superiore delle radici reali della equazione data.* — Così per

$$0 = -2\,x^6 - 2\,x^5 + 3\,x^4 - 5\,x^3 + x^2 - 7\,x + 3$$

si cambiano tutti i segni, affinchè il coefficiente della più alta potenza di x sia positivo.

Si trova

$$f(x) = 2\,x^6 + 2\,x^5 - 3\,x^4 + 5\,x^3 - x^2 + 7\,x - 3 = 0;$$

si scrivono ordinatamente i coefficienti negativi dopo aver loro cambiato il segno

$$3 \qquad 1 \qquad 3;$$

si formano i rapporti

$$\frac{3}{2+2};\quad \frac{1}{2+2+5};\quad \frac{3}{2+2+5+7};$$

si sceglie il maggior fra essi; cioè $\frac{3}{4}$; si aggiunge l'unità

$$\frac{3}{4}+1 = \text{circa } 2$$

è un limite superiore delle radici reali della proposta. — Infatti, se nel polinomio

$$f(x) = a' x^5 + b' x^4 - c' x^3 + d' x^2 - e' x - g' = 0$$

in cui sono suppòsti positivi il primo, il secondo, e il quarto coefficiente, negativi gli altri, e di questi ultimi si sono messi in evidenza i segni; per tutte le potenze di x moltiplicate da coefficienti positivi si fa una sostituzione analoga a quella fatta nella dimostrazione precedente per x^m; e così, se nel primo termine $a' x^5$, si pone invece di x^5

$$(x-1).x^4 + (x-1).x^3 + (x-1).x^2 + \\ + (x-1).x + (x-1) + 1;$$

se nel termine $b' x^4$ invece di x^4 si scrive

$$(x-1)x^3 + (x-1)x^2 + (x-1)x + (x-1) + 1;$$

ed invece di x^2 nel termine $d' x^2$

$$(x-1).x + (x-1) + 1;$$

si ottiene

$$0 = f(x) = a'(x-1)x^4 + \left.\begin{matrix} a'(x-1) \\ +b'(x-1) \\ -c' \end{matrix}\right| x^3$$

$$\left.\begin{matrix} +a'(x-1) \\ +b'(x-1) \end{matrix}\right| x^2 + \left.\begin{matrix} a'(x-1) \\ +b'(x-1) \\ +d'(x-1) \\ -e' \end{matrix}\right| x + \begin{matrix} a'(x-1)+a' \\ +b'(x-1)+b' \\ +d'(x-1)+d' \\ -g' \end{matrix}$$

Un numero positivo $+L_1$, che posto invece di x in $f(x)$ soddisfa

alle condizioni

$$\begin{cases} a'(L_1 - 1) > 0 \\ a'(L_1 - 1) + b'(L_1 - 1) - c' > 0 \\ a'(L_1 - 1) + b'(L_1 - 1) + d'(L_1 - 1) - e' > 0 \\ a'(L_1 - 1) + b'(L_1 - 1) + d'(L_1 - 1) - g' > 0; \end{cases}$$

ossia alle

$$\begin{cases} L_1 > 1 \\ L_1 > 1 + \dfrac{c'}{a' + b'} \\ L_1 > 1 + \dfrac{e'}{a' + b' + d'} \\ L_1 > 1 + \dfrac{g'}{a' + b' + d'} \end{cases}$$

è un limite superiore; giacchè tanto per esso quanto per numeri positivi maggiori, il polinomio $f(x)$ diventa una somma di termini tutti con coefficienti positivi e non può quindi più annullarsi. Ora trovasi nello stesso caso anche il numero L ottenuto aggiungendo 1 alla più grande delle frazioni

$$\frac{c'}{a' + b'}; \quad \frac{e'}{a' + b' + d'}; \quad \frac{g'}{a' + b' + d'}$$

formate appunto come si accenna nell'enunciato della regola, la quale resta così dimostrata.

È evidente che coll'esempio particolare trattato ora, il quale con chiarezza e semplicità ha condotto a giustificare la regola, nulla si è tolto alla verità della medesima in generale; giacchè una trasformazione analoga a quella fatta dianzi sulla funzione di quinto grado potrebbe ripetersi sul polinomio generale $f(x)$, che così si ridurrebbe ad una somma di termini come

$$[(x - 1) . S - p] . x^q$$

dove $-p$ (che può in alcuni termini essere 0) è il coefficiente negativo che moltiplica la q^{esima} potenza di x; ed S rappresenta la somma dei coefficienti positivi che in $f(x)$ precedono $-p$: su tali termini si potrebbe ripetere parola per parola il ragionamento fatto precedentemente, per arrivare alle medesime conclusioni.

Così per l'equazione

$$f(x) = 3\,x^9 + 5\,x^7 + 2\,x^4 - 8\,x^3 + 3\,x^2 - 5\,x - 2 = 0$$

si scrivono i numeri

$$8 \qquad 5 \qquad 2;$$

si formano i rapporti

$$\frac{8}{3+5+2} \qquad \frac{5}{3+5+2+3} \qquad \frac{2}{3+5+2+3};$$

si sceglie il maggiore che è

$$\frac{8}{3+5+2} = \frac{4}{5};$$

si aggiunge 1 al medesimo;

$$1 + \frac{4}{5}$$

è un limite superiore; in intieri, 2 è un limite superiore. Per avere un limite inferiore si ricorre alla trasformata

$$F(x) = 3\,x^9 - 5\,x^7 + 2\,x^4 + 8\,x^3 + 3\,x^2 + 5\,x - 2 = 0:$$

si scrivono i numeri

$$5 \qquad 2;$$

si formano i rapporti

$$\frac{5}{3} \qquad \frac{2}{3+2+8+3+5};$$

si sceglie il maggiore $\frac{5}{3}$; si aggiunge 1;

$$\frac{5}{3} + 1$$

è un limite superiore per la $F(x) = 0$;

$$-\left(\frac{5}{3} + 1\right) \quad \text{o in intieri} \; -3$$

è limite inferiore per $f(x) = 0$; perciò le radici reali di $f(x) = 0$ sono comprese nell'intervallo

$$(-3 \ldots 3).$$

Si noti che la regola precedente (IV) non è che un caso particolare di

questa (V); caso cioè in cui, invece di considerare le frazioni

$$\frac{c'}{a'+b'};\quad \frac{e'}{a'+b'+d'};\quad \frac{g'}{a'+b'+d'};$$

si ritengano i soli numeratori c'; e'; g'; e quindi questa seconda regola conduce ad un limite generalmente più piccolo di quello fornito dalla prima.

VI. *Si facciano tutte le derivate del primo membro dell'equazione data, ridotta in modo che il coefficiente della più alta potenza di x sia positivo: è limite superiore quel numero che, sostituito nel primo membro e nelle sue derivate, conduce a risultati tutti positivi.* Così per l'equazione

$$0 = f(x) = x^4 + x^3 + x^2 - 5x + 6$$

l'unità è un limite superiore, giacchè

$$f(1) = +4;\quad f'(1) = +4;\quad f''(1) = +20;$$
$$f'''(1) = +30:\quad f^{\text{IV}}(1) = +24$$

sono tutti risultati positivi.
Infatti, se in $f(x)$ invece di x si pone $L + H$, dove L è un numero, H una lettera, che può assumere nel calcolo valori diversi, si trova:

$$f(x) = f(L) + \frac{f'(L)}{1}.H + \frac{f''(L)}{1.2}H^2 + \dots;$$

ora se $f(L)$; $f'(L)$; $f''(L)$; ... sono tutti numeri positivi, $f(x)$ non è nullo nè per $H = 0$, nè per H uguale ad un numero positivo qualsiasi; ma siccome essendo

$$H = x - L,$$

all'uguaglianza $H = 0$ corrisponde l'altra $x = L$; e all'essere H un numero positivo qualsiasi corrisponde la disuguaglianza $x > L$; così nè per $x = L$, nè per $x > L$, $f(x)$ s'annulla; ossia è limite superiore il numero L, se per esso $f(L)$; $f'(L)$; $f''(L)$, ... sono numeri positivi: c. d. d.

Questa regola (regola newtoniana dei limiti) è fondamentale, e della medesima si farà uso costantemente in seguito: le precedenti, e segnatamente la prima, si adopereranno esclusivamente come ausiliarie di essa.

Intanto si può provare tosto, che un limite dato da una delle due regole precedenti soddisfa a quest'ultima. E difatti, rammen-

tando la seconda regola, giacchè la prima non è che un caso particolare di essa, un termine qualsiasi del polinomio $f(x)$ trasformato per la dimostrazione, termine che si cambia in un numero positivo per $x =$ limite trovato L, è

$$[(x-1)\,S-p]\,.\,x^q \qquad (*)$$

ossia

$$S\,.\,x^{q+1}-S\,.\,x^q-p\,.\,x^q.$$

La prima derivata $f'(x)$, pertanto, si comporrà della somma di tanti termini analoghi alla prima derivata del termine superiore, ossia di termini come

$$(q+1)\,S\,.\,x^q-q\,S\,.\,x^{q-1}-p\,q\,.\,x^{q-1}=$$
$$=q\,[(x-1)\,S-p]\,x^{q-1}+S\,x^q. \qquad (**)$$

Ora se L rende positivo il risultato (*) rende tale anche (**) giacchè sono positive le due parti di questa somma (si rammenti che S è positivo): cosicchè la prima derivata è positiva per $x = L$: ed analogamente per la seconda, la terza, ecc. Dunque il limite trovato con una delle regole precedenti soddisfa alla regola newtoniana, la quale pertanto condurrà generalmente ad un limite più basso, e nel caso più sfavorevole confermerà i risultati delle regole medesime.

Questa osservazione traccia nettamente la via da seguirsi: — la prima regola (IV) dà generalmente un limite grossolano, ma ottenibile immediatamente; la seconda (V) un limite generalmente minore; la terza (VI) potrà darne generalmente uno più basso. — Sia pertanto la equazione

$$f(x)=x^5-3\,x^3+5\,x^2-11\,x+13=0:$$

per la prima regola è limite superiore

$$11+1=12;$$

per la seconda lo è 4, giacchè delle due espressioni

$$\frac{3}{1};\quad \frac{11}{1+5}$$

la maggiore è 3; per la terza lo è 2 giacchè, come si verifica facilmente,

$$f(2)=+19;\qquad f'(2)=+53;$$
$$f''(2)=+134;\qquad f'''(2)=+222;$$
$$f^{\text{IV}}(2)=+240;\qquad f^{\text{V}}(2)=+120.$$

Cosicchè dal limite superiore 12 somministrato dalla prima regola si passa al 2 dato della regola newtoniana.

Dalla equazione data

$$0 = f(x)$$

si deduce la trasformata

$$F(x) = x^5 + 3x^3 + 5x^2 + 11x + 13 = 0$$

che non ha radici positive, perciò $f(x) = 0$ non ne ha di negative; e i limiti generali delle radici reali di questa equazione sono 0 e 2.

Fin qui dei principî analitici fondamentali: resta ora ad indicare tutti quei processi aritmetici, che ne rendano facile l'applicazione e che spianino la via alle ricerche successive.

CAPITOLO QUARTO.

Dividendo pel binomio $x - \alpha$ il polinomio

$$f(x) = a\,x^m + b\,x^{m-1} + c\,x^{m-2} + \ldots j\,x^2 + k\,x + l,$$

completo o reso tale, si ottiene in generale un resto numerico R ed un quoziente della stessa natura di $f(x)$, ma di grado minore di una unità, quoziente che può rappresentarsi con

$$\varphi(x) = A\,x^{m-1} + B\,x^{m-2} + C\,x^{m-3} + \ldots I\,x^2 + J\,x + K,$$

dove A, B, $C, \ldots I$, J, K sono coefficienti da determinarsi.
Si ha identicamente

$$f(x) = (x - \alpha)\,.\,\varphi(x) + R,$$

ossia

$$a\,x^m + b\,x^{m-1} + c\,x^{m-2} + \ldots + j\,x^2 + k\,x + l =$$

$$= (x - \alpha)\,(A\,x^{m-1} + B\,x^{m-2} + C\,x^{m-3} + \ldots + I\,x^2 + J\,x + K) + R$$

$$= A\,.\,x^m + \begin{array}{c|} B \\ -A\alpha \end{array}\; x^{m-1} + \begin{array}{c|} C \\ -B\alpha \end{array}\; x^{m-2} + \ldots + \begin{array}{c|} J \\ -I\alpha \end{array}\; x^2 + \begin{array}{c|} K \\ -J\alpha \end{array}\; x + \begin{array}{c} R \\ -K\alpha \end{array}$$

da cui

$$(A - a)\,.\,x^m + (B - b - A\alpha)\,x^{m-1} + (C - c - B\alpha)\,x^{m-2} + \ldots +$$
$$+ (J - j - I\alpha)\,x^2 + (K - k - J\alpha)\,x + R - l - K\alpha$$

uguale identicamente a zero, qualunque sia il valore numerico particolare attribuito ad x. Perciò questa espressione è annullata da quanti si vogliano numeri reali ρ, ossia è divisibile per il prodotto di quanti si vogliano fattori come $x-\rho$; prodotto che è una funzione intiera e razionale in x di grado qual siasi, diverso quindi e superiore di quanto si vuole al grado di $f(x)$: ma ciò, non è possibile se non nell'unico caso, in cui ciascheduno dei coefficienti nella espressione medesima sia identicamente nullo. Deve scriversi adunque:

$$\begin{aligned} &A-a=0, \\ &B-b-A\alpha=0, \\ &C-c-B\alpha=0, \\ &\dots\dots\dots \\ &J-j-L\alpha=0, \\ &K-k-J\alpha=0, \\ &R-l-K\alpha=0; \end{aligned}$$

ossia

$$\begin{aligned} &A=a, \\ &B=b+A\alpha, \\ &C=c+B\alpha, \\ &\dots\dots \\ &J=j+I\alpha, \\ &K=k+J\alpha, \\ &R=l+k\alpha; \end{aligned}$$

e, a parole; *un coefficiente qualunque di* $\varphi(x)$ *vale quello che occupa lo stesso posto in* $f(x)$ (*contando a partire da sinistra*); *aumentato di* α *volte il coefficiente che lo precede in* $\varphi(x)$. Ecco l'algoritmo per questo calcolo

$$[A]\ \dots\ \begin{array}{l|cccccc} 1^a & a & b & c & \dots\dots j & k & l \\ 2^a & & \alpha A & \alpha B & \dots\alpha I & \alpha J & \alpha K \\ \hline 3^a & A & B & C & \dots\dots J & K & R. \end{array} \qquad (\alpha)$$

Esso si compone di tre linee (1^a, 2^a, 3^a) e di $m+1$ colonne; nella prima linea si scrissero, secondo l'ordine di loro successione, i coefficienti di $f(x)$: nella terza, direttamente sotto a, si pose $A=a$: poscia dopo aver moltiplicato A per α, si portò il prodotto $A\alpha$

sotto b nella linea di mezzo (linea seconda): si fece la somma, B, dei due numeri della seconda colonna e si scrisse B nella terza linea: si moltiplicò B per α, il prodotto $B\alpha$ si portò nella seconda linea sotto c; si fece la somma, C, dei due numeri della terza colonna e si scrisse C nella terza linea, ecc.

Per esempio, per la divisione di

$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 1$$

per $x - 3$ si trova

2	-4	-2	1	
	6	6	12	(3)
2	2	4	13	

quindi

$$\varphi(x) = 2x^2 + 2x + 4 \qquad R = 13;$$

e conseguentemente

$$2x^3 - 4x^2 - 2x + 1 = (x - 3) . (2x^2 + 2x + 4) + 13;$$

parimenti per la divisione di

$$f(x) = x^5 - x^3 + 2x - 5$$

per $x + 2$, ossia per $x - \bar{2}$ si trova, dopo aver reso completa la funzione,

1	0	-1	0	2	-5	
	-2	$+4$	-6	12	-28	$(\bar{2})$
1	-2	3	-6	14	-33;	

e quindi

$$\varphi(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 6x + 14 \qquad R = -33;$$

o finalmente

$$x^4 - x^3 + 2x - 5 = (x + 2)(x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 6x + 14) - 33.$$

Se, come caso particolare, la funzione $f(x)$ deve dividersi per x, ossia per $x - 0$, allora i coefficienti di $\varphi(x)$ sono ordinatamente quelli di $f(x)$, esclusone l'ultimo, che rappresenta il resto della divisione; così per esempio

$$f(x) = x^5 - x^3 + 2x - 5 = (x - 0)(x^4 - x^2 + 2) - 5.$$

Ecc. Il calcolo precedente acquista importanza dal fatto, che *il resto R della divisione di $f(x)$ per $x - \alpha$ non è altra cosa se non*

$f(\alpha)$, *ossia il risultato della sostituzione in* $f(x)$ *di* α *ad* x; cosicchè quando si debba procedere a sostituzioni di simile genere, può tornare utile valersi dell'algoritmo precedente. Se, per esempio, si domanda il risultato che si ottiene, quando in

$$f(x) = x^6 - 3x^4 + x^3 - 7x - 1$$

si pone 2 in luogo di x; si procede alla divisione di $f(x)$ per $x - 2$:

$$\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & -7 & -1 & \\ & 2 & 4 & 2 & 6 & 12 & 10 & (2) \\ \hline 1 & 2 & 1 & 3 & 6 & 5 & 9 & \end{array}$$

il resto di questa divisione, ossia 9, è il risultato $f(2)$.

Il procedimento diventa comodo specialmente quando debbansi per uno stesso polinomio trovare differenti e successivi valori, come, ad esempio, quelli che corrispondono alle ipotesi di x uguale successivamente agli intieri

$$\ldots \overline{5};\ \overline{4};\ \overline{3};\ \overline{2};\ \overline{1};\quad 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ldots$$

Se, per esempio, dato

$$f(x) = x^4 - 5x^3 + 3x - 7,$$

si domandano $f(\overline{3})$, $f(\overline{2})$, ... ecco come può disporsi il calcolo:

	— 3	— 2	— 1	0	1	2	3
	1	1	1	1	1	1	1
$[A_1]$ ...	— 8	— 7	— 6	— 5	— 4	— 3	— 2
	24	14	6	0	— 4	— 6	— 6
	— 69	— 25	— 3	3	— 1	— 9	— 15
	200	43	— 4	— 7	— 8	— 25	— 52

Riguardo a questa disposizione è da notarsi che delle tre linee componenti l'algoritmo precedente $[A]$, la intermedia (seconda) è qui soppressa, la superiore (prima) è scritta una volta sola e surrogata dalla colonna intestata 0 e serve così per tutti i calcoli; la inferiore (terza) è sostituita rispettivamente dalle colonne — 3, — 2, ... in fondo

alle quali figura il risultato delle sostituzioni in $f(x)$ del numero dal quale la colonna è intestata; cosicchè

$$f(\overline{3}) = 200; \quad f(\overline{2}) = 43; \quad f(\overline{1}) = -4: \text{ ecc.}$$

È da notarsi che le due prime linee nella disposizione precedente si ottengono immediatamente.

Nel caso in cui si domandi il risultato della sostituzione in $f(x)$ di una frazione irriducibile $\frac{p}{q}$ ad x, si può seguire il processo ora indicato, applicandolo non ad $f(x)$, ma ad un nuovo polinomio $z(x)$, ottenibile da quello assai facilmente nel modo che segue. Se per esempio in

$$f(x) = a x^4 + b x^3 + c x^2 + d x + x^3$$

si fa

$$x = \frac{p}{q},$$

si trova

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = (a p^4 + b q \,.\, p^3 + c q^2 \,.\, p^2 + d q^3 \,.\, p + e q^4) : q^4$$

e rappresentando con

$$a_0; \quad a_1; \quad a_2; \quad a_3; \quad a_4$$

rispettivamente i numeri

$$a; \quad b q; \quad c q^2; \quad d q^3; \quad e q^4$$

e con $z(x)$ il polinomio

$$a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4;$$

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = z(p) : q^4.$$

Si può quindi applicare l'algoritmo a $z(x)$, sostituendo, in questo, p ad x, e poi dividere il risultato ottenuto per q^4: ed è evidente che questo procedimento, tuttochè dimostrato qui per un polinomio di quarto grado, vale qualunque sia il grado di $f(x)$. Ad esempio, domandisi il risultato $f\left(\frac{2}{7}\right)$ per

$$f(x) = x^4 - 5 x^3 + 3 x - 7;$$

si ha

$[A_2]$	$f\ldots$	1	—5	0	3	—7	
	$z\ldots$	1	—35	0	1029	—16807	
			2	—66	—132	1794	(2)
		1	—33	—66	897	—15013 : 2401	

donde

$$f(2:7) = -15013:2401\,.$$

Del pari se, dato il polinomio

$$f(x) = x^5 + 3\,x^4 - 2\,x^3 - 7\,x - 20\,,$$

si cercassero i numeri in cui esso si trasforma per x uguale successivamente a

$$\ldots -2\,;\, -\frac{3}{2}\,;\, -1\,;\, -\frac{1}{2}\,;\, 0\,;\, \frac{1}{2}\,;\, 1\,;\, \frac{3}{2}\,;\, 2\,;\ldots$$

ossia per x uguale a

$$\ldots -\frac{4}{2}\,;\, -\frac{3}{2}\,;\, -\frac{2}{2}\,;\, -\frac{1}{2}\,;\, 0\,;\, \frac{1}{2}\,;\, \frac{2}{2}\,;\, \frac{3}{2}\,;\, \frac{4}{2}\,;\ldots$$

dopo aver osservato che i coefficienti del polinomio $z(x)$ sono ordinatamente

$$1\,;\quad 3\times 2 = 6\,;\quad 0\times 2^2 = 0\,;\quad \overline{2}\times 2^3 = -16\,;$$
$$\overline{7}\times 2^4 = -112\,;\quad \overline{20}\times 2^5 = -640\,,$$

si disporrebbe il calcolo così:

—4	—3	—2	—1	0	1	2	3	4	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	
2	3	4	5	6	7	8	9	10	
—8	—9	—8	—5	0	7	16	27	40	
16	11	0	—11	—16	—9	16	65	144	...$[A_3]$
—176	—145	—112	—101	—112	—121	—80	83	464	
64	—205	—416	—539	—640	—761	—800	—391	1216	
2	$\frac{-205}{32}$	—13	$\frac{-539}{32}$	—20	$\frac{-761}{32}$	—25	$\frac{-391}{32}$	38	

I risultati dell'algoritmo sono quelli che trovansi nella linea

$$64; \; -205 \ldots ;$$

quelli della linea sottostante sono i rapporti dei risultati medesimi a 2^5, ossiano i numeri

$$f\left(\frac{p}{q}\right):$$

cosicchè è:

$$f(-2) = 2; \quad f\left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{-205}{32}; \ldots$$

Se fosse dato

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x + 1$$

e si domandasse

$$f\left(\frac{5}{7}\right),$$

si potrebbe scrivere

$$f(x) = \frac{6x^5 - 20x^3 + 5x^2 - 10x + 30}{30},$$

applicare il metodo indicato alla funzione

$$6x^5 - 20x^3 + \ldots$$

e dividere il risultato per 30: ecco questo calcolo:

6	0	— 20	5	— 10	30	
6	0	— 980	1715	— 24010	504210	
	30	150	— 4150	— 12175	— 180925	(5)
6	30	— 830	— 2435	— 36185	— 323285	

$$f\left(\frac{5}{7}\right) = \frac{-323285 : 7^5}{30}.$$

In taluni casi però, specialmente trattandosi di una sostituzione isolata, potrà forse tornare più comodo applicare addirittura l'algoritmo (A) ai coefficienti frazionari di $f(x)$; come anche talora, segnatamente trattandosi di polinomi incompleti, potrà meglio convenire di ricorrere ad una tavola delle potenze dei numeri e procedere alla sostituzione in modo diretto.

Quanto precede conduce ad un metodo di calcolo assai speditivo per la serie dei numeri

$$f(\alpha);\quad \frac{1}{1} f'(\alpha);\quad \frac{1}{1 \cdot 2} f''(\alpha); \ldots$$

Infatti, sia per esempio:

$$f(x) = a x^4 + b x^3 + c x^2 + d x + e$$

un polinomio di quarto grado: dividendo questo polinomio $f(x)$ per $x - \alpha$ si ottiene un quoziente, $\varphi(x)$, di terzo grado ed un resto numerico R_0; dividendo $\varphi(x)$ per $x - \alpha$ si ottiene un quoziente, $\psi(x)$, di secondo grado ed un resto numerico R_1; e così di seguito; talchè indicando con $\theta(x)$ e con $\varpi(x)$ i due successivi quozienti, con R_2 ed R_3 i due rispettivi resti, ed osservando che $\varpi(x)$ è = numero R_4, si ha la catena di identità:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-\alpha)\,\varphi(x) + R_0, \\ \varphi(x) &= (x-\alpha)\,\psi(x) + R_1, \\ \psi(x) &= (x-\alpha)\,\theta(x) + R_2, \\ \theta(x) &= (x-\alpha)\,\varpi(x) + R_3, \\ \varpi(x) &= R_4; \end{aligned}$$

e risalendo con sostituzioni successive dall'ultima delle medesime alla prima, si ottengono le espressioni

$$\begin{aligned} \theta(x) &= (x-\alpha) \cdot R_4 + R_3 \\ \psi(x) &= (x-\alpha)^2 \cdot R_4 + (x-\alpha) \cdot R_3 + R_2 \\ \varphi(x) &= (x-\alpha)^3 \cdot R_4 + (x-\alpha)^2 \cdot R_3 + (x-\alpha) \cdot R_2 + R_1 \\ f(x) &= (x-\alpha)^4 \cdot R_4 + (x-\alpha)^3 \cdot R_3 + \\ &\quad + (x-\alpha)^2 \cdot R_2 + (x-\alpha)\,R_1 + R_0 . \end{aligned}$$

Ora, se in quest'ultima identità si suppone $x = \alpha + H$ dove H è una variabile, si trova

$$f(\alpha + H) = R_0 + R_1 \cdot H + R_2 \cdot H^2 + R_3 \cdot H^3 + R_4 \cdot H^4; \quad (*)$$

ma per altra parte:

$$f(\alpha + H) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1} \cdot H + \frac{f''(\alpha)}{1 \cdot 2} H^2 + \\ + \frac{f'''(\alpha)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot H^3 + \frac{f^{\text{IV}}(\alpha)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot H^4 \quad (**)$$

qualunque sia H; perciò dal confronto delle due relazioni (*), (**), in forza di quanto si è altra volta dimostrato, si deduce

$$f(\alpha)=R_0=f(\alpha),\quad \frac{1}{1}f'(\alpha)=R_1=\varphi(\alpha),\quad \frac{1}{1.2}f''(\alpha)=R_2=\psi(\alpha),$$

$$\frac{1}{1.2.3}f'''(\alpha)=R_3=\theta(\alpha),\quad \frac{1}{1.2.3.4}f^{\text{iv}}(\alpha)=R_4=\varpi(\alpha).$$

I numeri richiesti adunque non sono altra cosa se non i resti delle divisioni per $x-\alpha$ dei polinomii successivi

$$f(x);\quad \varphi(x);\quad \psi(x);\quad \theta(x);\quad \varpi(x).$$

Così, ad esempio, pel polinomio di quarto grado

$$f(x)=x^4-3x^3+2x^2-5x-1$$

si trovano i risultati

$$f(\bar{2})=57;\quad \frac{1}{1}f'(\bar{2})=-81;\quad \frac{1}{1.2}f''(\bar{2})=44;$$

$$\frac{1}{1.2.3}f'''(\bar{2})=-11;\quad \frac{1}{1.2.3.4}f^{\text{iv}}(\bar{2})=1;$$

nel calcolo dei quali può farsi uso del seguente algoritmo;

$$[B]\qquad \begin{array}{llllll}
1 & -3 & 2 & -5 & -1 & \\
 & -2 & 10 & -24 & 58 & (-2) \\
\hline
1 & -5 & 12 & -29 & 57=f(-2) & \\
 & -2 & 14 & -52 & (-2) & \\
\hline
1 & -7 & 26 & -81=\frac{1}{1}f'(-2) & & \\
 & -2 & 18 & (-2) & & \\
\hline
1 & -9 & 44=\frac{1}{1.2}f''(-2) & & & \\
 & -2 & (-2) & & & \\
\hline
1 & -11=\frac{1}{1.2.3}f'''(-2) & & & & \\
 & (-2) & & & & \\
\hline
1=\frac{1}{1.2.3.4}f^{\text{iv}}(-2). & & & & &
\end{array}$$

Per intendere questa disposizione si osservi: che le tre linee superiori di numeri non sono altra cosa se non l'algoritmo noto pel calcolo di $f(-2)=57$; che siccome i numeri 1; —5; 12; —29 rappresentano i coefficienti di $\varphi(x)$, così per l'algoritmo speciale al calcolo di

$$\varphi(-2)=\frac{1}{1}f'(-2)$$

può servire come prima linea l'ultima del calcolo precedente, escluso l'ultimo numero a destra; e così di seguito.

Se dato $f(x)$ e data una frazione irriducibile $\frac{p}{q}$ si domandano i risultati

$$f\left(\frac{p}{q}\right);\quad \frac{1}{1}f'\left(\frac{p}{q}\right);\quad \frac{1}{1.2}f''\left(\frac{p}{q}\right);\ldots$$

si può sbarazzare il calcolo dai denominatori, procedendo su di un polinomio $z(x)$ dedotto da $f(x)$ e tale che se, per esempio,

$$f(x)=a\,x^4+b\,x^3+c\,x^2+d\,x+e$$

si abbia

$$z(x)=a_0\,x^4+a_1\,x^3+a_2\,x^2+a_3\,x+a_4\,,$$

dopo aver fatto

$$a_0=a;$$
$$a_1=bq;$$
$$a_2=cq^2;$$
$$a_3=dq^3;$$
$$a_4=eq^4.$$

Infatti si è già visto che è

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{z(p)}{q^4}.$$

Di più si ha

$$f'(x)=4\,a\,x^3+3\,b\,x^2+2\,c\,x+d$$
$$z'(x)=4\,a_0\,x^3+3\,a_1\,x^2+2\,a_2\,x+a_3;$$

conseguentemente

$$f'\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{4\,a\,.\,p^3+3\,b\,q\,.\,p^2+2\,c\,q^2\,.\,p+d\,q^3}{q^3};$$

e

$$z'(p) = 4a\,.\,p^3 + 3bq\,.\,p^2 + 2cq^2\,.\,p + dq^3;$$

o finalmente

$$f'\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{z'(p)}{q^3}\,.$$

Analogamente si troverebbe

$$\frac{1}{1\,.\,2}f''\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{\frac{1}{1\,.\,2}z''(p)}{q^2},\ \text{ecc.};$$

cosicchè pel computo richiesto basta calcolare i numeri

$$z(p);\quad \frac{1}{1}z'(p);\quad \frac{1}{1\,.\,2}z''(p);\dots$$

poscia dividere rispettivamente questi risultati per

$$q^4;\quad q^3;\quad q^2;\dots$$

Così, dato

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x - 1$$

si trova

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{145}{16};\quad f'\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{46}{8};\quad \frac{1}{1\,.\,2}f''\left(\frac{3}{2}\right) = 2;$$

$$\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}f'''\left(\frac{3}{2}\right) = 3;\quad \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}f^{\text{IV}}\left(\frac{3}{2}\right) = 1;$$

come risulta dal seguente algoritmo:

	1	−3	2	−5	−1	
	1	−6	8	−40	−16	
		3	−9	−3	−129	(3)
[B_1]	1	−3	−1	−43	−145, : 16 = $-\frac{145}{16}$	
		3	0	−3	(3)	
	1	0	−1	−46, : 8 = $-\frac{46}{8}$		
		3	9	(3)		
	1	3	8, : 4 = 2			
		3	(3)			
	1	6, : 2 = 3				
		(3)				
	1					

È chiaro che questi procedimenti aritmetici, dimostrati pel caso di un polinomio di quarto grado, valgono qualunque siasi il grado; talchè in generale si sanno rapidamente ottenere i risultati,

$$f(\alpha);\quad \frac{1}{1}f'(\alpha);\quad \frac{1}{1.2}f''(\alpha);\ \ldots$$

che erano appunto l'oggetto delle attuali ricerche.

Se si domandassero i numeri

$$f\left(\frac{2}{3}\right);\quad f'\left(\frac{2}{3}\right);\quad f''\left(\frac{2}{3}\right);\ldots,$$

dato il polinomio

$$f(x) = \frac{1}{3}x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x - 1,$$

potrebbe scriversi

$$f(x) = \frac{2x^4 + 6x^3 - 3x^2 + x - 6}{6}$$

applicare il metodo indicato ora per la sostituzione di $\frac{2}{3}$ ad x nel polinomio

$$2x^4 + 6x^3 - 3x^2 + x - 6,$$

e dividere quindi i risultati ottenuti tutti indistintamente per 6; ecco il principio del calcolo:

2	6	— 3	1	— 6	
2	18	— 27	27	— 486	
	4	44	34	122	(2)
2	22	17	61	— 364, : 81	
	4	52	138	(2)	
2	26	69	199, : 27		

Cosicchè

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{-364:81}{6} = -0,74\ldots$$

$$f'\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{199:27}{6} = 1,22\ldots$$

ecc.

Siccome è identicamente

$$f(x) = f(0 + x) = f(0) + x \cdot \frac{f'(0)}{1} + x^2 \cdot \frac{f''(0)}{1.2} + $$
$$+ x^3 \cdot \frac{f'''(0)}{1.2.3} + \ldots,$$

così i numeri

$$f(0); \quad \frac{1}{1} f'(0); \quad \frac{1}{1.2} f''(0); \ldots$$

non sono altra cosa se non che i coefficienti di $f(x)$ presi ordinatamente, cominciando dall'ultimo: per

$$f(x) = \frac{1}{2} x^5 + x^3 - x^2 - 7x + 1$$

si ha

$$f(0) = 1; \quad \frac{1}{1} f'(0) = -7$$

$$\frac{1}{1.2} f''(0) = -1; \quad \frac{1}{1.2.3} f'''(0) = +1;$$

$$\frac{1}{1.2.3.4} f^{IV}(0) = 0 \quad \frac{1}{1.2.3.4.5} f^{V}(0) = \frac{1}{2}.$$

I calcoli precedenti trovano una utilissima applicazione nella terza regola data pei limiti generali delle radici di

$$f(x) = 0.$$

Siccome poi per la regola medesima è sufficiente conoscere i segni dei numeri

$$f(\alpha); \quad \frac{1}{1} f'(\alpha); \quad \frac{1}{1.2} f''(\alpha); \ldots$$

e non importano i loro valori, così bene spesso basterà incominciare l'algoritmo [B] per poter concludere subito che il numero tentato è limite superiore.

Tutto questo può vedersi negli esempi che seguono:

I. L'equazione

$$x^4 + x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$$

ammette per la prima regola i limiti generali $+6$ e -8; per la seconda i limiti -8 e $+4$; si può tentare se $+3$ soddisfa alla

regola newtoniana: si trova, incominciando:

1	1	— 5	7	— 3	
	3	12	21	84	(3)
1	4	7	28	81 $= f(3)$	

ed è inutile proseguire, giacchè si è certi che siccome tutti i coefficienti della terza linea sono positivi, così pel modo speciale di formazione dell'algoritmo [*B*] i successivi risultati

$$\frac{1}{1} f'(3); \quad \frac{1}{1.2} f''(3), \ldots$$

saranno tutti positivi al pari di $f(3)$; 3 adunque è limite: provisi il 2.

1	1	— 5	7	— 3	
	2	6	2	18	(2)
1	3	1	9	15 $= f(2)$;	

ed è inutile proseguire: 2 è limite superiore: provisi 1:

1	1	— 5	7	— 3	
	1	2	— 3	4	(1)
1	2	— 3	4	1 $= f(1)$	
	1	3	0	(1)	
1	3	0	4 $= \frac{1}{1} f'(2)$		

ed è inutile continuare: 1 è limite superiore; 0 non lo è più, giacchè due coefficienti della proposta, ossiano i risultati

$$f(0) \quad \text{ed} \quad \frac{1}{1.2} f''(0)$$

sono negativi. — Allo stesso modo il limite inferiore rapidamente si porta da — 8 a — 4 riferendosi al polinomio

$$F(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 - 7x - 3$$

e cominciando l'algoritmo per $x = 7$

1	— 1	— 5	— 7	— 3	
	7	42	259	1764	
1	6	37	252	1761	(7)

7 è limite, ecc.

È necessario che lo studioso, riferendosi alla questione dei limiti generali, si convinca sopra un gran numero d' esempi della rapidità colla quale si applica la regola newtoniana a mezzo dell'algoritmo [B].

Possono per ora servire a questo scopo gli esempi seguenti:

II. Le radici reali dell' equazione

$$x^5 + 2x^3 + 8x^2 - 10x + 1 = 0$$

hanno per limiti;

(prima regola)	$+11$ e -11
(seconda regola)	$+2$ e -5
(regola newtoniana)	$+1$ e -3.

III. Le radici reali dell' equazione

$$x^5 - x^3 + 2x^2 - 4x + 3 = 0$$

hanno per limiti:

(prima regola)	$+5$ e -5
(seconda regola)	$+3$ e -5
(regola newtoniana)	$+1$ e -2.

IV. Le radici reali dell' equazione

$$x^3 + x^2 - 166x + 661 = 0$$

hanno per limiti generali

(prima regola)	$+167$ e -662
(seconda regola)	$+84$ e -662
(regola newtoniana)	$+10$ e -16.

Per passare rapidamente dal limite $+84$ al $+10$ e dal -662 al -16 non si ha a far altro che tentare se la regola newtoniana è verificata per numeri assai distanti fra loro; come $50, 20, \ldots$ pel passaggio da 84 a $+10$ [equazione data $f(x) = 0$]; 500, 100, 50, 20 pel passaggio da 662 a $+16$ [equazione trasformata $F(x) = 0$]: ciascheduno di questi tentativi è brevissimo: ad esempio ecco quello

che prova che 50 è limite

1	1	-166	661	
	50	2550		(50)
1	51	»		

è inutile continuare, ecc., ecc.

V. Per le radici reali dell'equazione

$$f(x) = x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120 = 0$$

si trovano i limiti;

(prima regola)	$+121$ e -31
(seconda regola)	$+11$ e -11
(regola newtoniana)	$+2$ e -3.

VI. Per l'equazione

$$0 = f(x) = x^6 - 7x^5 + 5x^4 - 2x^3 - 8x^2 - 5x + 1$$

si trova;

(prima regola)	$+9$ e -9
(seconda regola)	$+8$ e -2
(regola newtoniana)	$+7$ e -1.

Il computo dei numeri $f(\alpha)$; $\frac{1}{1}f'(\alpha)$; $\frac{1}{1.2}f''(\alpha)$;... trova un' altra utilissima applicazione in quanto segue:
Siccome è

$$f(\alpha + H) = f(\alpha) + H.\frac{f'(\alpha)}{1} + H^2.\frac{f''(\alpha)}{1.2} + \ldots,$$

così, dovendosi calcolare prima $f(\alpha)$ e poi parecchi altri risultati ottenibili con numeri diversi da α, uno qualunque dei quali sia espresso da $\alpha + H$, si potrà in ciascheduna delle sostituzioni successive,

$$f(\alpha + H),$$

attribuendo ad H il valore conveniente e ricorrendo allo sviluppo precedente, valersi dei numeri

$$f(\alpha);\quad \frac{1}{1}f'(\alpha);\quad \frac{1}{1.2}f''(\alpha);\ldots$$

calcolati una volta tanto, e che possono in questo caso chiamarsi *numeri fissi*.

Ed ecco, in un esempio, il lato pratico di un calcolo siffatto.

L'equazione

$$f(x) = x^5 + x^4 + 5\,x^3 - 2\,x^2 - 5\,x - 1 = 0$$

ha una radice positiva unica; è limite superiore per questa $5 + 1 = 6$ (prima regola), $\dfrac{5}{1+1+5} + 1 = 2$ circa (seconda regola), 2 (regola newtoniana); e si ha

$$f(2) = +69; \qquad f(1) = -1;$$

cosicchè tale radice è compresa fra 1 e 2: venga proposto ora di restringere i limiti per la medesima: i numeri da sostituirsi in $f(x)$ saranno tutti compresi fra 1 e 2, saranno uguali cioè all'unità aumentata di una certa frazione H, ed il risultato di ciascheduna sostituzione sarà in generale

$$f(1+H) = f(1) + H\frac{f'(1)}{1} + H^2\frac{f''(1)}{1.2} + \ldots$$

Calcolinsi perciò i numeri fissi

$$f(1); \quad \frac{f'(1)}{1}; \quad \frac{f''(1)}{1.2}; \ldots;$$

essi sono ordinatamente:

$$-1; \quad 15; \quad 29; \quad 19; \quad 6; \quad 1;$$

si moltiplichino rispettivamente per

$$-1; \quad H; \quad H^2; \quad H^3; \quad H^4; \quad H^5;$$

e somminsi i prodotti ottenuti; nella somma si ha il risultato

$$f(1+H).$$

Così, se i numeri fissi vengono moltiplicati rispettivamente per

$$1; \quad 01; \quad (0,1)^2; \quad (0,1)^3; \quad (0,1)^4; \quad (0,1)^5$$

e se i prodotti ottenuti

— 1, 000 00
1, 500 00
0, 290 00
0, 019 00
0, 000 60
0, 000.01

sono sommati assieme, si ottiene il risultato

$$f(1,1) = +0,809\,610;$$

e siccome $f(1)$ è negativo, così la radice è compresa fra 1 ed 1,1. — Del pari se i numeri fissi superiori sono rispettivamente moltiplicati per

$$1; \quad 0,05; \quad (0,05)^2; \quad (0,05)^3; \quad (0,05)^4; \quad (0,05)^5$$

e se i prodotti ottenuti

$$\begin{array}{r} -1,000\,000\,000\,0 \\ 0,750\,000\,000\,0 \\ 0,072\,500\,000\,0 \\ 0,002\,375\,000\,0 \\ 0,000\,037\,500\,0 \\ 0,000\,000\,312\,5 \end{array}$$

vengono sommati assieme, si ottiene il risultato

$$f(1,05) = -0,175\,087\,187\,5:$$

e siccome $f(1,10)$ è positivo, così la radice è compresa fra 1,05 e 1,10.

Continuando, se i soliti numeri fissi sono moltiplicati rispettivamente per

$$1, \quad 0,6; \quad (0,06)^2; \quad (0,06)^3; \quad (0,06)^4; \quad (0,06)^5$$

e se i prodotti ottenuti

$$\begin{array}{r} -1,000\,000\,000\,0 \\ 0,900\,000\,000\,0 \\ 0,104\,400\,000\,0 \\ 0,004\,104\,000\,0 \\ 0,000\,077\,760\,0 \\ 0,000\,000\,777\,6 \end{array}$$

si sommano insieme, si ottiene:

$$f(1,06) = +0,008\,582\,537\,6,$$

e siccome $f(1,05)$ è negativo, così la radice richiesta è compresa fra 1,05 ed 1,06, ecc.

E chiaro però che in una questione come quella che precede, non importa conoscere il valore completo della sostituzione $f(\alpha + H)$, basta conoscerne il segno: a questo pure si presta assai facilmente il metodo attuale.

Per esempio, dato il polinomio

$$f(x) = 21\,x^5 - 20\,x^3 - 9\,x + 4,$$

si ricava, cominciando le sostituzioni per $x = 1$

$$f(1) = -4;\ f'(1) = +36;$$

ecc. (i risultati seguenti sono tutti positivi).

Or bene, si domanda: $f(1{,}2)$ è positivo o negativo?

Si ha

$$f(1{,}2) = f(1) + 0{,}2 f'(1) + \ldots$$

$= -4 + 7{,}20 +$ numeri positivi $=$ numero positivo.

— Del pari il polinomio

$$f(x) = 7\,x^6 - 10\,x^4 - 9\,x^2 + 8\,x - 5$$

che per $x = 1$ fornisce, cominciando l'algoritmo

$$f(1) = -9; \quad f'(1) = -8; \quad \frac{1}{1\,.\,2} f''(1) = +36,$$

(i risultati seguenti sono tutti positivi), è positivo o negativo per $x = 1{,}2$?

Hassi

$$f(1{,}2) = f(1) + 0{,}2\,.\,f'(1) + 0{,}04\,.\,\frac{f''(1)}{1\,.\,2} + \ldots$$

$$= -9 - 0{,}2 \times 8 + 0{,}04 \times 36 + \text{numeri positivi}$$

$$= -9 - 1{,}6 + 1{,}44 + \text{numeri positivi}$$

$=$ risultato presumibilmente negativo, come in questo caso si può verificare difatti completando la sostituzione.

— L'equazione

$$f(x) = x^9 + 2\,x^5 + 3\,x - 7 = 0$$

ha un sola radice positiva ρ, è limite superiore (regola newtoniana) 2, e si trova

$$f(2) = +575; \quad f(1) = -1;$$

dunque ρ è compreso fra 1 e 2; si tratta di serrare questi limiti. Cominciando l'algoritmo per $x = 1$, si trova

$$f(1) = -1\,; \qquad \frac{1}{1} f'(1) = +22\,; \qquad \frac{1}{1.2} f''(1) = +56\,;$$

ecc. (risultati tutti positivi).
Ora per $x = 1{,}1$, $f(1{,}1)$ è positivo o negativo?

$$f(1{,}1) = f(1) + 0{,}1\, f'(1) + (0{,}1)^2 . \frac{f''(1)}{1.2} + \ldots$$

$= -1 + 2{,}2 +$ numeri positivi $=$ risultato positivo: la radice ρ è dunque compresa fra 1 ed 1,1.
Continuando, il polinomio è positivo o negativo per $x = 1{,}05$?

Hassi

$$f(1{,}05) = f(1) + 0{,}05 . \frac{f'(1)}{1} + (0{,}05)^2 . \frac{f''(1)}{1.2} + \ldots$$

$= -1 + 1{,}10 +$ numeri positivi: la radice cercata è dunque compresa fra 1 ed 1,05.
Proseguendo, il polinomio dato è positivo o negativo per $x = 1{,}04$? si ha

$$f(1{,}04) = f(1) + 0{,}04 . \frac{f'(1)}{1} + (0{,}04)^2 . \frac{f''(1)}{1.2} + \ldots$$

$$= -1 + 0{,}88 + 0{,}0896 + 0{,}006656 + \text{numeri positivi}$$
$$= -1 + 0{,}976256 \ldots$$

Il risultato molto presumibilmente è negativo: del resto è facile verificarlo completando qui il calcolo. Conseguentemente per la radice cercata vale la limitazione

$$1{,}04 < \rho < 1{,}05\,.$$

Talchè si è arrivato assai rapidamente sino ai centesimi della radice positiva unica di

$$f(x) = x^9 + 2x^5 + 3x - 7 = 0.$$

Questo metodo, del quale si farà grande uso in seguito, può chiamarsi metodo dei ***tentativi di sostituzione.***

Una questione più generale della precedente, e che si presenterà più innanzi, è quella di far servire la conoscenza dei numeri

$$f(\alpha); \quad \frac{1}{1} f'(\alpha); \quad \frac{1}{1.2} f''(\alpha); \ldots$$

al calcolo non solamente di

$$f(\alpha + H),$$

ma eziandio a quello di

$$f'(\alpha + H),\quad f''(\alpha + H), \ldots$$

Ed eccone il modo:
Si ha identicamente

$$f(\alpha + H) = f(\alpha) + H.f'(\alpha) + H^2.\frac{f''(\alpha)}{1.2} + H^3.\frac{f'''(\alpha)}{1.2.3} + H^4.\frac{f^{\text{IV}}(\alpha)}{1.2.3.4} + \ldots$$

$$f'(\alpha + H) = f'(\alpha) + H.f''(\alpha) + H^2.\frac{f'''(\alpha)}{1.2} + H^3.\frac{f^{\text{IV}}(\alpha)}{1.2.3} + \ldots$$

$$f''(\alpha + H) = f''(\alpha) + H.\frac{f'''(\alpha)}{1} + H^2.\frac{f^{\text{IV}}(\alpha)}{1.2} + \ldots$$

$$f'''(\alpha + H) = f'''(\alpha) + H.\frac{f^{\text{IV}}(\alpha)}{1} + \ldots$$

$$f^{\text{IV}}(\alpha + H) = f^{\text{IV}}(\alpha) + \ldots$$

Ed è chiaro che se si dispone l'algoritmo:

Linea fond.e	$f(\alpha)$	$f'(\alpha)$	$f''(\alpha)$	$f'''(\alpha)$	$f^{\text{IV}}(\alpha) \ldots$
1a	$\frac{H.f'(\alpha)}{1}$	$\frac{H.f''(\alpha)}{1}$	$\frac{H.f'''(\alpha)}{1}$	$\frac{H.f^{\text{IV}}(\alpha)}{1}$	...
2a	$\frac{H.H.f''(\alpha)}{1.2}$	$\frac{H.H.f'''(\alpha)}{1.2}$	$\frac{H.H.f^{\text{IV}}(\alpha)}{1.2}$	....	...
3a	$\frac{H.H.H.f'''(\alpha)}{1.2.3}$	$\frac{H.H.Hf^{\text{IV}}(\alpha)}{1.2.3}$	...	...	...
4a	$\frac{H.H.H.H.f^{\text{IV}}(\alpha)}{1.2.3.4}$	...	...	...	...

[C]

. . . .

— nel quale il termine di posto n^{esimo} (si conta a partire da sinistra) di una qualsiasi delle linee, esclusa la fondamentale, è il prodotto per H del termine $(n+1)^{esimo}$ della linea immediatamente superiore a quella che si considera, prodotto diviso pel numero d'ordine progressivo di quest'ultima linea —; le somme dei termini contenuti nelle colonne sono rispettivamente:

$$f(\alpha+H),\quad f'(\alpha+H),\quad f''(\alpha+H),\quad f'''(\alpha+H),\ldots$$

Ecco l'uso che si farà in seguito di quest'algoritmo. Si troverà ad esempio, con metodi che si svilupperanno più innanzi, che l'equazione

$$0=F(x)=8\,x^3-4\,x-5$$

ha la sua unica radice positiva ρ compresa fra 1,0471 ed 1,0473; ed allora si richiederà di eseguire le sostituzioni

$$F(1{,}0471)\quad \text{e}\quad F(1{,}0473):$$

e di più di rinserrare i limiti nell'ultima cifra, in modo cioè che essi non differiscano se non di una unità dell'ultima specie. Supposto $\alpha=1{,}047$ si calcoleranno i numeri:

$$\begin{aligned} F\ \ (1{,}047)&=-0{,}006153416\\ F'\ (1{,}047)&=22{,}309016\\ F''\ (1{,}047)&=50{,}256\\ F'''(1{,}047)&=48 \end{aligned}$$

e in base ad essi si svilupperanno i tre successivi algoritmi.

	— 0,006 153 416	22,309 016	50,256	48
	0,002 230 901 6	0,005 025 6	0,004 8	($H=0{,}0001$)
	0,000 000 251 28	0,000 000 24		
	0,000 000 000 008			
(*)	— 0,003 922 263 112	22,314 041 84	50,260 8	48
	0,002 231 404 184	0,005 026 08	0,004 8	($H=0{,}0001$)
	0,000 000 251 304	0,000 000 24		
	0,000 000 000 008			
(**)	— 0,001 690 607 616	22,319 068 16	50,265 6	48
	0,002 231 906 816	0,005 026 56	0,004 8	($H=0{,}0001$)
	0,000 000 251 328	0,000 000 24		
	0,000 000 000 008			
(***)	0,000 541 550 536	22,324 094 96	50,270 4	48

— Il primo di questi algoritmi si riferisce al caso di $\alpha = 1{,}047$ e di $H = 0{,}0001$; perciò esso conduce ai numeri

$$F(1{,}0471);\quad F'(1{,}0471);\ldots$$

i quali trovansi nella linea (*).

— Il secondo di questi algoritmi considera il caso di $\alpha = 1{,}0471$ e di $H = 0{,}0001$; con esso si ottengono i risultati

$$F(1{,}0472):\quad F'(1{,}0472);\ldots$$

che sono quelli disposti nella linea (**).

— Il terzo algoritmo finalmente considera il caso di $\alpha = 1{,}0472$ e di $H = 0{,}0001$ e conseguentemente fornisce i risultati:

$$F(1{,}0473);\quad F'(1{,}0473);\ldots$$

che trovansi scritti nella linea (***).

— S'intende facilmente il modo di formazione delle diverse linee in ciascheduno di questi algoritmi, quando si pensi a ciò che venne detto dianzi in generale; per esempio i numeri della seconda linea (esclusa la fondamentale) del secondo algoritmo si ottengono così:

$$\frac{0{,}005\,026\,08}{2} \times 0{,}0001 = 0{,}000\,000{,}251\,304\ \cdot$$

$$\frac{0{,}0048}{2} \times 0{,}0001 = 0{,}000\,000\,24,$$

l'unico numero della terza linea dell'algoritmo medesimo in questo modo:

$$\frac{0{,}000\,000\,24}{3} \times 0{,}0001 = 0{,}000\,000\,000\,008;$$

ecc.

Siccome $F(1{,}0472)$ è negativo ed $F(1{,}0473)$ è positivo, così per la radice richiesta dell'equazione

$$8\,x^3 - 4\,x - 5 = 0$$

vale la limitazione

$$1{,}0472 < \rho < 1{,}0473;$$

e di più si conoscono ora i numeri

$$F(1{,}0472);\quad F(1{,}0473);\quad F'(1{,}0473)$$

necessari, come si vedrà in seguito, per poter continuare il calcolo della radice.

— È ben da notarsi qui che i risultati

$$F(1{,}047);\quad F'(1{,}047);\quad F''(1{,}047);$$

i quali hanno servito di base al calcolo precedente, possono dedursi con un calcolo simile partendo dai numeri

$$F(1{,}04);\quad F'(1{,}04),\ldots$$

e questi alla loro volta partendo dagli altri

$$F(1);\quad F'(1);\ldots$$

Insomma mediante l'algoritmo $[C]$ si può in generale ***valersi dei risultati ottenuti sostituendo nella serie***

$$f(x);\quad f'(x);\quad f''(x);\ldots$$

ad x un numero semplice α, per calcolare i risultati della sostituzione ad x di un numero successivo $\alpha + H$, di quante cifre si vogliono.

Se si considera attentamente quanto si è fatto sin qui, si vedrà, che si sono potute conoscere rapidamente limitazioni assai vicine per l'unica radice positiva dell'equazione

$$f(x) = x^5 + x^4 + 5\,x^3 - 2\,x^2 - 5\,x - 1 = 0,$$

e dell'altra

$$f(x) = x^9 + 2\,x^5 + 3\,x - 7 = 0;$$

e che nello stesso modo potrà procedersi, ogniqualvolta da un solo cambiamento di segno in $f(x)$ o in $F(x)$ sarà accertata l'esistenza di un' unica radice positiva o negativa della proposta

$$f(x) = 0.$$

Questo accade talora quando l'equazione si riferisce ad un problema di scienza applicata; ed è così per esempio della equazione

$$x^5 + 2\,x^4 + x^3 - 9{,}1236.x - 4{,}5618 = 0,$$

la quale si riferisce ad un problema di idraulica, e la cui unica radice positiva è compresa, come si trova tosto applicando i metodi precedenti, fra 1,43 ed 1,44.

E così del pari dell'equazione

$$x^3 - 0{,}0081\,.x - 0{,}0163 = 0,$$

la quale ha rapporto con un problema di resistenza dei materiali, e la cui unica radice positiva cade fra 0,26 e 0,27.
È così in terzo luogo per la equazione

$$x^5 - 0{,}00251 . x - 0{,}0314 = 0,$$

la quale si riferisce ad un problema di tecnologia del calore, e la cui radice positiva trovasi tosto compresa fra

0,50 e 0,51, ecc.

Anche in taluni casi specialissimi, nei quali le variazioni siano più d'una, può dedursi qualche cosa di definitivo riguardo alle radici. Ad esempio l'equazione

$$f(x) = x^4 - 4\,x^3 - 3\,x + 22 = 0$$

per la regola di Descartes ha due radici positive al più, alle quali la regola newtoniana assegna il limite 4 e si ha

$$f(3) = -\,14; \quad f(4) = +\,10.$$

Ora in generale fra 3 e 4 potrebbe esistere un numero dispari di radici; ma siccome le radici possibili in questo caso speciale sono due soltanto, così fra 3 e 4 esiste una sola radice della proposta; l'altra si verifica che è 2. Del pari, l'equazione

$$f(x) = x^3 - 5\,x + 3 = 0$$

ha due radici positive al più; il limite superiore ottenuto colla regola newtoniana è 2, e si ha

$$f(2) = 1 \quad \text{ed} \quad f(1) = -\,1;$$

cosicchè fra 1 e 2 può esservi un numero dispari di radici; il che non è conciliabile col caso attuale, se non ammettendo che fra 1 e 2 ve ne sia una sola: l'altra esiste fra 1 e 0, giacchè

$$f(1) = -\,1, \quad f(0) = +\,3;$$

Inoltre si deduce

$$F(x) = x^3 - 5\,x - 3 = 0,$$

che ha una sola radice positiva fra 3 e 2: dunque, raccogliendo, la proposta ha tre radici reali; una fra $-\,3$ e $-\,2$; una seconda fra 0 ed 1, ed una terza fra 1 e 2; etc.

Ma però nel caso generale, in cui $f(x)$ presenta più variazioni, i soli principii precedenti non bastano a risolvere completamente la questione: non si sa decidere se fra due risultati dello stesso segno esistano ... 4; 2; 0 radici, e se fra due di segno opposto ne esistano ... 5; 3; 1. Il passaggio dai limiti generali $-L'$ e $+L$, i quali comprendono tutte le radici reali di

$$f(x) = 0$$

a tante coppie di limiti, ciascheduna delle quali comprenda una sola di esse, è quanto dicesi *la separazione delle radici*, ed è in ciò che consiste la difficoltà vera della ricerca delle radici, e superata questa, il problema è risolto. — A tal fine si ricorrerà a nuovi principî desunti dalla rappresentazione geometrica del polinomio $f(x)$, rappresentazione della quale trattano i capitoli seguenti, dal quinto al nono.

CAPITOLO QUINTO.

Per determinare la posizione di punti situati in un piano si può far uso del metodo seguente. — Si segnano sul piano due rette fisse perpendicolari, e si misurano le distanze alle quali si trova, tanto dall'una quanto dall'altra, ciascheduno dei punti dati. Così se x ed y (fig. 1) sono queste due rette fisse (*assi; asse delle* x ed *asse delle* y) ed O il loro punto d'intersezione (*origine*), la

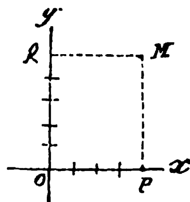


Fig. 1.

posizione del punto qualsiasi M, situato sul piano delle due rette fisse, viene determinata misurando la distanza

$$\overline{PM} = \overline{OQ} \text{ del punto da } x$$

e quella

$$\overline{QM} = \overline{PQ} \text{ da } y:$$

a queste distanze converranno numeri o intieri o frazionari, o limitati fra due frazioni tanto prossime quanto si vuole; insomma nu-

meri qualsiansi della serie reale da 0 a $+\infty$. — Viceversa, segnati in modo invariabile i due assi sul piano, la conoscenza dei numeri relativi alle distanze $\overline{PM}$ e $\overline{QM}$, che corrono fra ciascheduno degli assi medesimi ed un punto del piano, serve alla determinazione del punto; così se, per esempio, $\overline{QM}$ vale *quattro* e $\overline{PM}$ *cinque* unità lineari, si stacchi a partire da O sull'asse x il segmento $\overline{OP}$ lungo quattro, e sull'asse y il segmento $\overline{OQ}$ lungo cinque, adottando in queste operazioni una certa scala comune ad arbitrio; dagli estremi P e Q così ottenuti si conducano le parallele ad x e ad y; il punto in cui queste parallele si segano è il punto M, distante quattro unità da y e cinque da x. — Però i due assi x ed y, segandosi, determinano non solamente l'angolo retto considerato sin qui, ma bensì i quattro angoli della fig. 2 (*superiore a destra, superiore a sinistra, inferiore a destra, inferiore a sinistra* per un osservatore che guardi la figura); talchè in realtà quando si avessero a considerare i quattro

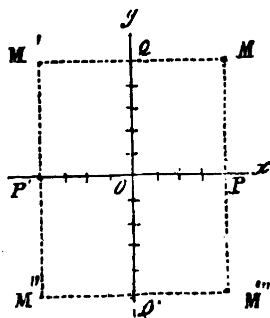


Fig. 2.

punti M, M', M'', M''', vertici del rettangolo i cui lati sono, uno il doppio di $\overline{PM}$, l'altro il doppio di $\overline{QM}$, si troverebbero per ciascheduno di essi quelli stessi numeri trovati per M; e reciprocamente, volendo costruire il punto, pel quale si assegnano speciali distanze, si otterrebbero quattro soluzioni del problema (M, M', M'', M'''). Affinchè adunque la posizione di un punto del piano fosse fissata senza ambiguità, occorrerebbe indicare fra i quattro angoli definiti dianzi quello in cui il punto giace o deve essere collocato: ed è quanto si ottiene a mezzo della seguente *convenzione sui segni*.

Una retta (ossia *una direzione* e la *direzione opposta*) può considerarsi come il luogo delle posizioni occupate successivamente da un punto che, seguendo costantemente la medesima, scorra in modo continuo sul piano (in *un senso* o *nel senso opposto*): — e un segmento di retta quindi può riguardarsi, come una porzione limitata

di tale luogo. È sotto questo punto di vista che si considerano i segmenti $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$, $\overline{OP'}$ ed $\overline{OQ'}$ e qualsiasi altro staccato sull'asse x e sull'asse y; come generati, cioè, da un punto che seguendo l'una o l'altra delle direzioni, alle quali i segmenti medesimi appartengono, parte da un estremo di essi e va all'altro estremo.

Nulla di più naturale intanto di convenire che l'estremo, dal quale parte il punto mobile generatore, sia per tutti i segmenti quello stesso punto O in cui si segano gli assi. Ciò ammesso, per generare $\overline{OP}$, è necessario che il punto mobile vada da O verso destra, mentre per generare $\overline{OP'}$ è necessario che il punto mobile proceda da O verso sinistra: i due segmenti $\overline{OP}$ ed $\overline{OP'}$ quindi, quantunque lunghi egualmente, sono descritti da punti che seguono direzioni opposte; ed è quanto analiticamente si conviene di distinguere coll'attribuire loro segni opposti; così se $\overline{OP}$ vale quattro unità positive, ossia $+4$; $\overline{OP'}$ vale quattro unità negative, ossia -4. Del pari, per ottenere il segmento $\overline{OQ}$, è necessario che il punto generatore scorra da O verso l'alto, mentre per ottenere $\overline{OQ'}$ è necessario che esso vada da O verso il basso; i segmenti $\overline{OQ}$ ed $\overline{OQ'}$ quindi, quantunque lunghi egualmente, vanno considerati, geometricamente come aventi direzioni opposte, ed analiticamente come aventi segni opposti; cosicchè $\overline{OQ}$ vale cinque unità positive, ossia $+5$; ed $\overline{OQ'}$ cinque unità negative, ossia -5. Talchè le due distanze

pel punto M sono $+4$ e $+5$
pel punto M' sono -4 e $+5$
pel punto M'' sono -4 e -5
pel punto M''' sono $+4$ e -5:

e in questa guisa ciascheduno dei quattro punti ha una caratteristica a sè, che lo distingue perfettamente dagli altri tre.

Concludendo adunque; un punto del piano è perfettamente determinato e non può confondersi con alcun altro, quando le distanze che il medesimo ha dai due assi vengano assegnate non solo col loro valore assoluto (come sarebbe il caso in determinazioni di lunghezze, di aree, ecc.); ma anche con un segno $+$ o $-$ che attribuisce al punto una posizione relativa speciale. È ben da notarsi che la convenzione precedente corrisponde alla convenzione dei numeri negativi fatta in aritmetica generale; e che in forza della medesima si è in grado di staccare o sull'asse x o sull'asse y un segmento misurato da un numero qualsiasi della serie reale da $-\infty$ a $+\infty$.

In generale le due distanze α e β del punto M dai due assi, prese in questo senso lato, diconsi le *coordinate* di M; e più precisamente α l'*ascissa* o la x, e β l'*ordinata* o la y; per indicare ciò si fa uso della notazione $M(\alpha; \beta)$ o $(\alpha; \beta)$: la notazione più generale $(x; y)$, in cui x ed y possono essere qualsiansi, rappresenta un punto qualunque fra tutti quelli determinati per mezzo delle loro distanze dai due assi speciali x ed y; mentre la notazione $(x'; y')$ esprimerebbe la stessa cosa, ma quando i due assi fossero le rette x' ed y'.

I. Il punto $(0; \beta)$ giace sull'asse y sopra O o sotto O, secondochè β è positivo o negativo, e si ottiene staccando sull'asse stesso a partire da O un segmento di β unità (positive o negative): analogamente il punto $(\alpha; 0)$ giace sull'asse x a destra o a sinistra di O, secondo che α è positivo o negativo, e si ottiene staccando sull'asse stesso a partire da O il segmento di α unità (positive o negative): il punto $(0; 0)$ è l'origine O. —
I due punti $M(3, 0)$, $M'(1; 0)$ (veggasi la fig. 3) giaciono sull'asse x, entrambi a destra di O, e la loro distanzn $\overline{M'M}$ vale

$$\overline{OM} - \overline{OM'} = 3 - 1;$$

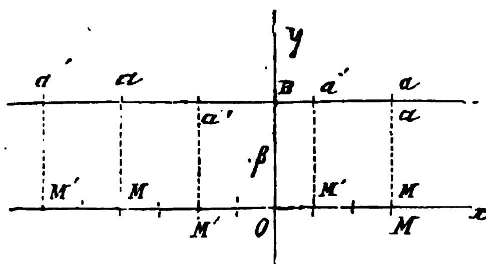


Fig. 3.

i due punti $M(3; 0)$, $M'(\bar{2}; 0)$ giaciono sull'asse x, il primo a destra di O, il secondo a sinistra; come scorgesi nella figura, la loro distanza (nel computo della quale deve considerarsi unicamente l'aggregato delle unità, indipendentemente dai segni) vale evidentemente $3 + 2$, ossia $3 - \bar{2}$; — i due punti $M(\bar{4}; 0)$, $M'(\bar{6}; 0)$ giaciono sull'asse x entrambi a sinistra di O, e la loro distanza $\overline{M'M}$ vale evidentemente unità $6 - 4$, ossia unità $\bar{4} - \bar{6}$.
Se si confrontano i risultati ottenuti per la distanza $\overline{M'M}$ nei tre casi numerici trattati; ossia i risultati

$$3 - 1; \quad 3 - \bar{2}; \quad \bar{4} - \bar{6}$$

si vede che, in forza della convenzione dei segni, l'espressione della distanza fra i due punti dati situati sull'asse x è costantemente, co-

munque siano collocati questi punti rispetto all'origine O, la *differenza che passa fra l'ascissa maggiore e la minore:* cosicchè in generale la distanza $\overline{M'M}$ fra i punti $M(\alpha; 0)$ ed M' $(\alpha'; 0)$ è $\alpha - \alpha'$ se α è $> \alpha'$. È evidente inoltre che avviene lo stesso per due punti situati su una parallela all'asse x: per esempio, se tale parallela è condotta per B essendo $\overline{OB} = \beta$, è certo che tutti i punti giacenti sulla medesima, hanno la stessa ordinata, e due di essi possono rappresentarsi con $(\alpha; \beta)$ ed $(\alpha'; \beta)$; ad essi è perfettamente applicabile quanto fu detto precedentemente, relativamente ai due punti situati sull'asse x; ossia la loro distanza è in ogni caso rappresentata da $\alpha - \alpha'$. In generale adunque *la differenza fra le due ascisse (la maggiore meno la minore) rappresenta la distanza fra due punti situati sull'asse x o sopra una parallela a questo.* È appena necessario aggiungere, che una conclusione affatto analoga si ottiene per *due punti situati sull'asse y o sopra una parallela a questo;* ossia che *la distanza fra i medesimi è sempre la differenza fra le due ordinate (ordinata maggiore meno ordinata minore).*

II. Se $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ sono numeri positivi, i punti $M(\alpha; \beta)$, M' $(\alpha'; \beta')$ cadono nell'angolo retto superiore a destra. Portati a posto questi punti (fig. 4) e guidata $M'N$ parallela all'asse x, NM vale $\beta - \beta'$,

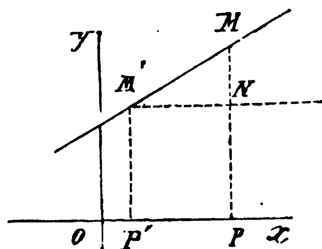


Fig. 4.

$M'N$, $\alpha - \alpha'$ ed $\overline{M'M}^2$, $(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2$; donde ricavasi che il numero da cui è misurata la distanza $M'M$ dei due punti dati è uguale a

$$\sqrt{(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2}.$$

Questa formola, dimostrata nel caso, in cui i due punti M' ed M cadano nell'angolo retto superiore a destra, è vera, e non è necessario provarlo direttamente, in generale dovunque si trovino i punti M ed M'; giacchè sarà in ogni caso possibile costruire il triangolo $MM'N$; i punti M', N si troveranno sempre sopra una parallela all'asse x,

quindi la loro distanza $\overline{M'N}$ per quanto fu detto precedentemente varrà costantemente $\alpha - \alpha'$; del pari i punti $M N$, cadranno sempre sopra una parallela all'asse y, quindi la loro distanza $\overline{NM}$ verrà data da $\beta - \beta'$: e finalmente la richiesta lunghezza $\overline{M'M}$ sarà in ogni caso espressa dalla formola trovata dianzi. Se, per esempio, i punti dei quali cercasi la distanza sono $M(2;2)$ ed $M'(\bar{1};\bar{3})$ è

$$\overline{M'M} = \sqrt{(2-\bar{1})^2 + (2-\bar{3})^2} = 5{,}83\ldots$$

III. Sul piano sono segnati gli assi perpendicolari x ed y segantisi in O (fig. 5): si individua il punto $O'(n;\ p)$ e per esso si guidano le rette x' ed y', rispettivamente parallele ad x e ad y. Un punto qualsiasi del piano può riferirsi ora indifferentemente o ai

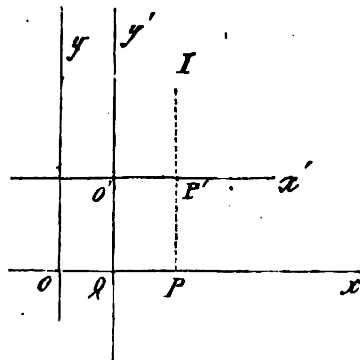


Fig. 5.

primi o ai secondi di questi assi e denotarsi perciò o con $(x;y)$ o con $(x';y')$. Quali relazioni esistono fra le coordinate $(x;\ y)$ e quelle $(x';\ y')$ dello stesso punto qualsiasi I? Giaciano O' ed il punto qualunque I nell'angolo retto superiore a destra, formato dagli assi x ed y. Se IP è normale all'asse x e sega x' in P', si ha

$$\overline{OP} = \overline{OQ} + \overline{QP} = n + \overline{O'P'}$$
$$\overline{PI} = \overline{QO'} + \overline{P'I} = p + \overline{P'I};$$

ossia

$$x = n + x', \qquad x' = x - n$$
$$y = p + y', \qquad y' = y - p.$$

Queste relazioni, dimostrate vere nel caso speciale in cui O' ed I cadano nell'angolo retto superiore a destra, sono vere — e non è necessario dimostrarlo — comunque siano collocati questi punti rispetto ad O; e ciò per le espressioni generali delle distanze fra due

punti situati su una parallela ad x, e su una parallela ad y. Così, per esempio, il punto $\left(\bar{2};\, \frac{1}{2}\right)$, ossia il punto determinato dalle due relazioni simultanee $x = -2$; $y = 0{,}5$, riferite ai nuovi assi x' ed y', la cui origine è $O'(1;\, \bar{3})$, ha per coordinate

$$x' = -2 - 1 = -3;$$

$$y' = \frac{1}{2} + 3 = 3\,{}^1/_2:$$

il punto $(5;\, \bar{3})$, ossia il punto per cui è $x = 5$, $y = -3$ riferito ai nuovi assi x' ed y', la cui origine è O'; $\left(7;\, \overline{\frac{3}{8}}\right)$ ha per coordinate

$$x' = 5 - 7 = -2$$

$$y' = -3 + \frac{3}{8} = -2\frac{5}{8}, \text{ ecc.}$$

È necessario che lo studioso noti, come la convenzione, fatta sui segni, la quale ha condotto ad una precisa determinazione del punto per mezzo delle sue coordinate, permetta eziandio di considerare le questioni sotto un punto di vista generale, e di raggruppare in una sola formola vari casi che altrimenti esigerebbero una formola speciale per ciascheduno. In accordo colla convenzione medesima poi si chiamerà in seguito *regione delle* x (*delle* y) *positive o negative* quella fra le due parti del piano, determinate dall'asse x (*dall'asse* y), nella quale cadono le ascisse (le ordinate) positive, o negative.

CAPITOLO SESTO.

Se si stabilisce una condizione fra l'ascissa e l'ordinata; per esempio, se si vuole che sia

$$\text{ordinata} = \text{ascissa} + 1,$$

o, come si suole scrivere,

$$y = x + 1,$$

è chiaro che non tutti i punti del piano possono soddisfare alla medesima, giacchè, per esempio, tra i punti in numero infinitamente grande, che hanno la stessa ascissa 1, risponde al caso quel solo la cui ordinatà si ottiene dalla relazione precedente, ponendo in essa l'unità invece di x; ossia il punto d'ordinata 2: — del pari di tutti i punti, in numero infinitamente grande, aventi l'ordinata $\bar{1}$ soddisfa alla condizione precedente quel solo, la cui ascissa si ottiene da

$$y = x + 1 \text{ facendo } y = -1,$$

ossia la cui ascissa è $\bar{2}$: — e in generale un punto del piano $M(\alpha; \beta)$ non conviene alla condizione posta se non è identicamente $\beta = 1 + \alpha$. Dunque la condizione $y = x + 1$ *rappresenta una serie speciale di punti situati sul piano, ad esclusione di tutti gli altri.* Essa è un caso particolare di una relazione più generale,

$$p\,y = a'\,x + b',$$

dove p, a', b' sono tre numeri, ed y ed x rappresentano l'ordinata e l'ascissa di qualsiasi punto che convenga alla medesima: questa relazione può porsi sotto la forma

$$y = \frac{a'}{p} . x + \frac{b'}{p}$$

ossia, facendo

$$a' : p = a, \qquad b' : p = b; \qquad y = a x + b.$$

Pertanto a questa condizione non soddisfa il punto $M(\alpha; \beta)$ del piano, se non è identicamente $\beta = a \alpha + b$: essa adunque rappresenta un luogo geometrico: qualunque numero della serie reale da $-\infty$ a $+\infty$, preso per ascissa, conduce ad una, e ad una sola ordinata; e in forza della legge di continuità, cui va soggetta la funzione $a x + b$, si possono individuare punti di questo luogo vicini tanto quanto si vuole. Se è identicamente

$$\beta = a \alpha + b,$$
$$\beta' = a \alpha' + b,$$
$$\beta'' = a \alpha'' + b,$$

sono

$$(\alpha; \beta); \quad (\alpha'; \beta'); \quad (\alpha'': \beta'')$$

tre di questi punti: si individuino i medesimi sul piano, facendo (figura 6):

$$\overline{OP} = \alpha; \quad \overline{PM} = \beta; \quad \overline{OP'} = \alpha';$$
$$\overline{P'M'} = \beta'; \quad \overline{OP''} = \alpha''; \quad \overline{P''M''} = \beta'':$$

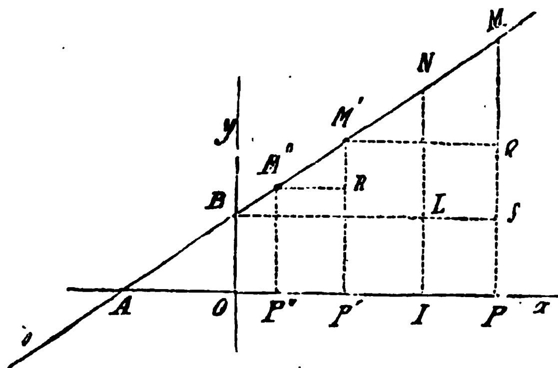


Fig. 6.

per M' ed M'' si conducano le $M'Q$ ed $M''R$ parallele all'asse x:

risulta

$$\overline{M'Q} = \alpha - \alpha', \quad \overline{M''R} = \alpha' - \alpha'',$$
$$\overline{QM} = \beta - \beta', \quad \overline{RM'} = \beta' - \beta'',$$

e si deduce dai triangoli rettangoli $MM'Q$, $M'M''R$:

$$\text{tang.}\, MM'Q = \frac{\beta - \beta'}{\alpha - \alpha'}; \quad \text{tang.}\, M'M''R = \frac{\beta' - \beta''}{\alpha' - \alpha''}.$$

Ma le identità precedenti

$$\beta = a\,\alpha + b, \quad \beta' = a\,\alpha' + b, \quad \beta'' = a\,\alpha'' + b,$$

sottratte due a due, forniscono

$$\beta - \beta' = a\,(\alpha - \alpha'); \quad \beta' - \beta'' = a\,(\alpha' - \alpha'');$$

donde

$$\frac{\beta - \beta'}{\alpha - \alpha'} = \frac{\beta' - \beta''}{\alpha' - \alpha''} = a,$$

ossia

$$\text{tang.}\, MM'Q = \text{tang.}\, M'M''R = a$$

e perciò

$$\text{angolo } MM'Q = M'M''R:$$

quindi è una sola la direzione dei due segmenti $M''M'$, $M'M$; in altri termini *i tre punti M, M' M'' sono in linea retta*: e questo si verifica, comunque si scelgano e per quanto siano vicini i tre punti medesimi; cosicchè, concludendo, il luogo geometrico di tutti i punti le cui coordinate soddisfano alla relazione

$$y = a\,x + b$$

è una linea retta, g.

Dei due angoli che essa forma coll'asse x uno ha per tangente trigonometrica a (l'angolo $MM'Q$ sulla figura); di più, siccome, condotta dal punto B, in cui g sega l'asse y, la BS parallela ad x, risulta

$$\overline{OB} = \overline{PS} = \overline{PM} - \overline{SM} = \overline{PM} - \overline{BS}\,\text{tang.}\, MBS = \beta - a\,\alpha = b;$$

così detta retta sega l'asse y alla distanza b dall'asse x, ossia, come si dice, ha b per *ordinata all'origine*.

Per esempio, la retta rappresentata dalla condizione

$$y = 2\,x + 1,$$

sega l'asse y in B (fig. 7) e si ha $\overline{OB} = 1$; ossia la retta medesima ha 1 per ordinata all'origine.

Per $x = 1$ si deduce $y = 3$ dunque $M(1; 3)$ è un altro suo punto: l'angolo acuto MBx' ha per tangente trigonometrica $2 : 1 = 2$, ossia il coefficiente di x nella equazione $y = 2x + 1$.

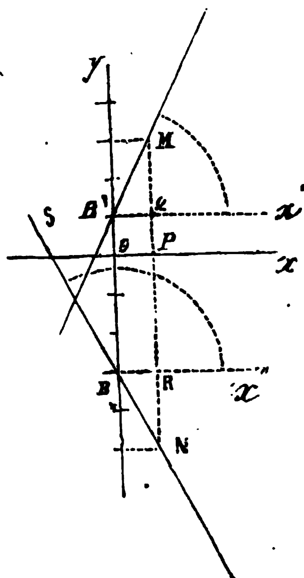


Fig. 7.

La retta $y = -2x - 3$ sega l'asse y al punto B' di ordinata -3, ossia ha $\bar{3}$ per ordinata all'origine. Per $x = 1$ se ne deduce $y = -5$ e quindi il punto $N(1; \bar{5})$ è un altro punto della medesima, la quale è rappresentata quindi in $SB'N$.

Si ha in questo caso

$$\text{tang. } SB'x'' = -\text{tang. } x''B'N$$

e siccome $x''B'N$ è acuto e $B'R$ vale una unità, NR due unità, così

$$\text{tang. } x''B'N = \text{numero positivo} = 2 : 1 = 2,$$

e conseguentemente

$$\text{tang. } SB'x'' = -2;$$

perciò dei due angoli che la retta fa coll'asse x è in questo caso l'ottuso, quello la cui tangente vale il coefficiente di x nella equazione.

Dai due esempi precedenti si può scorgere intanto che la convenzione sui segni non lascia alcun dubbio sulla posizione del punto in cui la retta sega l'asse y; ma che è necessario indicare precisamente quale dei due angoli, che la retta rappresentata dalla condizione $y = ax + b$ forma coll'asse x, sia in ogni caso quello la cui tangente vale a. Perciò l'osservatore, che ha il suo occhio al disopra del foglio del disegno, fissi un punto qualsiasi della retta g; guidi per esso la parallela all'asse x; consideri quella parte della g, che trovasi al disopra di tale parallela; supponga che questa parte ruoti attorno al punto fissato, nel senso degli aghi di un orologio, sino a coincidere colla parallela condottà. La porzione di piano generata da tale parte della retta nella sua rotazione è l'angolo la cui tangente vale a, e si converrà di chiamarlo *l'angolo che la retta comprende coll'asse x*.

Così per la retta

$$y = 1 + 2x \quad \text{(fig. 7)}$$

si fissa il punto B, si conduce la Bx' parallela ad x; si considera la parte BM al disopra di x'; l'angolo MBx', che la BM genera ruotando nel senso degli aghi di un orologio sino a coincidere con x', ha per tangente 2: per la retta

$$y = -2x - 3$$

si fissa il punto B', si conduce $B'x''$ parallela ad x; la parte $B'S$, ruotando nel senso degli aghi di un orologio sino a coincidere con x'', genera l'angolo $SB'x''$, la cui tangente è a. — È chiaro che in particolare il punto fissato può essere quello in cui la retta g taglia l'asse x: allora la parallela, alla quale si è accennato dianzi, non è altra cosa se non l'asse stesso.

I due coefficienti a e b, in forza di quanto è nettamente stabilito, valgono a determinare la posizione della retta

$$y = ax + b$$

e possono chiamarsi *le costanti della medesima*; e precisamente a la *prima*, b la *seconda* costante.

— È appena necessario avvertire che qualunque retta è rappresentata da una relazione di primo grado fra x ed y. Infatti, se è data la retta g (fig. 6), un punto qualunque N della medesima ha per ascissa $\overline{OI}$, e per ordinata

$$\overline{IN} = \overline{OB} + \overline{LN} = \overline{OB} + \overline{BL} \operatorname{tang} NBL = \overline{OB} + \overline{OI} \operatorname{tang} NBL;$$

dunque

$$\text{Ordinata} = \text{Ascissa} \,.\, \text{tang}\, NBL + \overline{OB};$$

la relazione è la stessa e le costanti sono sempre l'ordinata all'origine e la tangente trigonometrica dell'angolo che la retta comprende coll'asse x.

Siccome i punti che soddisfano alla condizione

$$y = a \cdot x + b$$

possono essere tanto vicini quanto si vuole, così si può ammettere che sia un solo punto mobile quello che, scorrendo sul piano in una certa direzione (o nella direzione opposta), per esempio da sinistra verso destra (o da destra verso sinistra) descriva la retta g.

La condizione

$$y = a\,x + b$$

dicesi ***equazione della retta:*** ed è da notarsi qui adunque, che il più semplice dei polinomi algebrici

$$f(x) = a\,x^m + b \;{}^{m-1} + \dots$$

studiati in questo lavoro, cioè il polinomio

$$a\,x + b$$

è geometricamente rappresentato da una retta.

I. La condizione

$$y = 2 - x$$

rappresenta una retta, per la quale il valore della prima costante a è $= -1$, e quello della seconda b è $= 2$; questa retta comprende coll'asse delle x l'angolo, la cui tangente trigonometrica vale $\bar{1}$ (l'angolo di 125°) e sega l'asse y nel punto situato nella regione delle y positive alla distanza 2 da 0.

Supponendo

$$x = \dots \bar{2};\quad \bar{1};\quad 0;\quad 1;\quad 2;\quad 3;\quad 4; \dots$$

si trova

$$y = \dots 4;\quad 3;\quad 2;\quad 1;\quad 0;\quad \bar{1};\quad \bar{2}, \dots$$

e perciò i punti

$$(\bar{2};\ 4),\quad (\bar{1};\ 3),\quad (0;\ 2),\quad (1;\ 1)\quad (2;\ 0),\quad (3;\ \bar{1}), \dots$$

sono altrettanti punti del luogo: fra questi è da notarsi il punto (2; 0), nel quale la retta sega l'asse x, giacchè l'ascissa 2 soddisfa

alla condizione:

$$y = 0 = 2 - x.$$

Lo studioso può individuare questi ed altri punti della retta sul piano.

II. Sono degni di nota i casi seguenti: — alla condizione $y = \beta$ soddisfano tutti i punti, che giacciono sulla parallela all'asse x, condotta alla distanza β da questo asse: ossia $y = \beta$ è l'equazione di tale parallela; — alla condizione $x = \alpha$ soddisfano i punti che giacciono sulla parallela all'asse y, condotta alla distanza α da questo asse; in altre parole $x = \alpha$ è l'equazione di tale parallela.
Come casi particolari di questi, $y = 0$ è l'equazione dell'asse delle x; $x = 0$ quella dell'asse della y.

III. Per segnare una retta, della quale sia data la equazione, per esempio, la retta

$$y = -2x + 3,$$

si può procedere in più modi.
Si individui (fig. 8) il punto B (0; 3), staccando a partire da O sopra

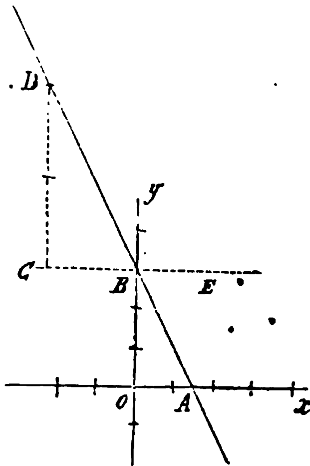


Fig. 8.

Oy il segmento 3; vertice B, si costruisca il triangolo rettangolo DCB, i lati del quale, rispettivamente paralleli agli assi, sono lunghi, CB una unità e DC due unità, prese in una scalà comune qualsiasi: BD è la retta richiesta. — Infatti essa passa per B (0; 3)

ed inoltre si ha

$$\text{tang}\, DBE = -\ \text{tang}\, CBD = -2\,;$$

c. d. essere.

— Si mettano a posto (fig. 8) i due punti

$$B(0;\,3) \quad \text{ed} \quad A\left(\frac{3}{2};\,0\right)$$

in cui la retta taglia i due assi; e si guidi la congiungente tali due punti; in essa si ha la retta richiesta.

— Si mettano a posto due punti qualsiansi della retta e si guidi la congiungente, ecc.

Se nella figura (9) $\overline{OB}$ vale $-{}^1/_3$; ed il triangolo DCB è rettangolo in C; se il lato $\overline{CB}$ è $= +3$, il lato $\overline{CD} = +2$, la retta BD è quella che ha per equazione

$$3y = -2x - 1\,;$$

giacchè per $x = 0$ l'ordinata è $-{}^1/_3$, e di più dalla figura si ricava

$$\text{tang}\, DBE = -\ \text{tang}\, CBD = -{}^2/_3$$

c. d. essere.

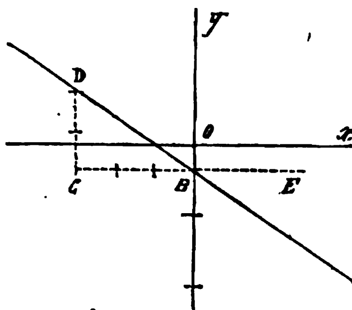


Fig. 9.

— Per la retta di equazione $y = 3x - 1$, si segni (fig. 10) il punto $B(0;\,-1)$ e si costruisca il triangolo rettangolo BCD, in cui

$$\overline{BC} = 1, \quad \overline{CD} = 3\,;$$

BD è la retta richiesta. Infatti $x = 0$ dà $y = -1$, e di più

$$\text{tang}\, DAx = \text{tang}\, DBC = +3$$

IV. Di una retta, la quale comprenda coll'asse x l'angolo, la cui tangente trigonometrica è 2, e che passi pel punto $(\overline{1};\,5)$, si

determina facilmente l'equazione, osservando che la forma generale di questa è costantemente, per qualsiasi retta,

$$y = a x + b;$$

che in questo caso particolare per dato della questione si ha anzitutto

$$a = + 2;$$

e che di più, siccome la retta deve passare pel punto $(\bar{1}; 5)$, così

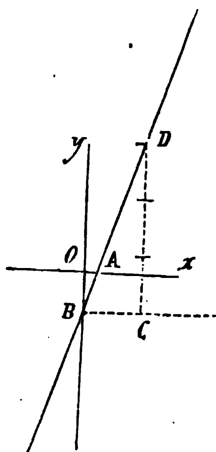


Fig. 10.

le coordinate di questo punto debbono soddisfare alla condizione

$$y = 2 x + b,$$

ossia deve essere

$$5 = - 2 + b;$$

donde

$$b = 7;$$

pertanto l'equazione cercata è:

$$y = 2 x + 7.$$

In generale per una retta, la quale passi pel punto $(\alpha; \beta)$, e comprenda coll'asse x l'angolo la cui tangente trigonometrica è data ed uguale ad a, si può scrivere, indicando con b l'altra costante, ancora indeterminata,

$$\beta = a \alpha + b,$$

donde

$$b = \beta - a \alpha,$$

e quindi l'equazione

$$y = \alpha x + \beta - \alpha \alpha,$$

ossia

$$y - \beta = \alpha (x - \alpha).$$

— Della retta, la quale passa pei due punti

$$\left(2; -\frac{3}{2}\right), \quad \left(\frac{1}{5}; -3\right)$$

si determina facilmente l'equazione, osservando che essa debbe aver tali costanti, a e b, che se in

$$y = a x + b$$

si pongono in luogo di x e di y le coordinate or date, la relazione sia soddisfatta; ossia deve aversi:

$$\begin{cases} -\frac{3}{2} = 2 . a + b, \\ -3 = \frac{a}{5} + b; \end{cases}$$

donde

$$a = \frac{5}{6}, \quad b = -\frac{19}{6};$$

e quindi l'equazione

$$6 y = 5 x - 19.$$

V. Per determinare il punto, nel quale si segano le due rette

$$y = -3 x + 5, \quad y = x + 1,$$

si osservi che le coordinate X ed Y di esso debbono soddisfare simultaneamente alla prima ed alla seconda delle equazioni date; giacchè il punto richiesto si trova tanto sull'una retta, quanto sull'altra.

Deve pertanto essere:

$$\begin{cases} Y = -3 X + 5 \\ Y = X + 1, \end{cases}$$

e la questione è ridotta a trattare queste due relazioni, come due equazioni coesistenti a due incognite. Si trova

$$X = 1; \quad Y = 2;$$

talchè il pnnto (1; 2) è il punto che si cercava.

Parimenti — nel punto

$$\left(-\frac{11}{8};\ \frac{13}{8}\right)$$

si segano le due rette

$$7y = 10 - x; \quad y = x + 3:$$

— nel punto

$$\left(\frac{45}{13};\ \frac{17}{13}\right)$$

le altre due

$$3y = 2x - 3; \quad 5y = 10 - x:$$

— nel punto

$$\left(\frac{8}{5};\ \frac{21}{5}\right)$$

le altre due

$$y = -3x + 9; \quad y = 2x + 1:$$

nel punto

$$\left(-\frac{4{,}20}{1{,}06};\ -\frac{1{,}874}{1{,}06}\right)$$

le altre

$$y = 0{,}32\,x - 0{,}50; \quad 2y = 1{,}70\,x + 3{,}20:$$

— nel punto

$$\left(-\frac{b - b'}{a - a'};\ \frac{a\,b' - a'\,b}{a - a'}\right)$$

le due rette

$$y = a\,x + b; \quad y = a'\,x + b'.$$

— In seguito occorrerà sovente di dover determinare l'ordinata Y, o semplicemente il segno dell'ordinata Y, del punto d'incontro di due rette, di ciascheduna delle quali si conosce un punto, $(s; r)$ per la prima; $(s'; r')$ per la seconda; e la prima costante; a per la prima ed a' per la seconda.

In generale sarà meglio eseguire tutto il calcolo direttamente sulle due equazioni numeriche, che saranno del caso; però talora potrà giudicarsi conveniente di ricorrere alla espressione generale della Y, trovata nell'ultimo esempio;

$$Y = \frac{a\,b' - a'\,b}{a - a'}.$$

Intanto i numeri a ed a' saranno dati direttamente; e b e b'

risulteranno uguali rispettivamente ad

$$r - a s, \quad r' - a' s';$$

— giacchè le equazioni delle due rette sono:

$$\begin{cases} y - r = a(x - s), \\ y - r' = a'(x - s'); \end{cases}$$

ossia

$$y = a x + r - a s,$$
$$y = a' x + r' - a' s';$$

donde, per $x = 0$,

ordinata all'origine per la prima retta, $r - a s = b$;

» » » seconda retta $r' - a' s' = b'$.

Questi valori di a, a', b, b', sostituiti nella espressione di Y, condurranno al valore speciale che sarà del caso. Però, senza eseguire per intero questo calcolo, potrà dirsi se Y risulta positivo o negativo col criterio seguente: presa per a la maggiore delle due costanti date, in modo cioè che $a - a'$ sia positivo, Y risulta positivo o negativo secondo che

$$a b' \ \textit{è} \ > a' b \quad \textit{ovvero} \quad < a' b.$$

Per esempio si tratti delle rette

$$\begin{cases} y - 0{,}0014 = -0{,}080\,(x - 0{,}30) \\ y - 0{,}0068 = 0{,}202\,(x - 0{,}40). \end{cases}$$

Si faccia

$$a = 0{,}202 > a' = -0{,}080.$$

Conseguentemente risultano

$$\begin{cases} b' = 0{,}0014 + 0{,}08 \times 0{,}30 = 0{,}0254, \\ b = 0{,}0068 - 0{,}202 \times 0{,}4 = -0{,}074; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a b' = 0{,}202 \times 0{,}0254 = 0{,}0051308, \\ a' b = \bar{0}{,}08 \times 0{,}\bar{0}74 = 0{,}00592; \end{cases}$$

e siccome $a b'$ è $< a' b$, così Y è negativo. Se ne può ora calcolare il valore, facendo la differenza

$$a b' - a' b = -0{,}0007892$$

e dividendola per

$$a - a' = 0{,}202 + 0{,}08 = 0{,}282;$$

si trova

$$Y = -0{,}0027\ldots$$

VI: La retta g che, riferita all'origine O e agli assi x ed y ha per equazione

$$y = a\,x + b,$$

può venir riferita ad una nuova origine $O'\,(n, p)$ e a due assi x' e y' rispettivamente paralleli ad x e ad y. Come si trasforma allora la sua equazione? Ricorrendo all'ultimo esempio trattato nel número precedente, si deve dire che per un punto qualsiasi della retta medesima è

$$\text{ascissa } x = \text{ascissa } x' + n$$

$$\text{ordinata } y = \text{ordinata } y' + p,$$

ossia

$$x = x' + n$$

$$y = y' + p$$

e quindi la nuova equazione è:

$$y' + p = a\,(x' + n) + b$$

ossia

$$y' = a\,x' + (a\,n + b - p).$$

Per esempio; la retta

$$y = 2\,x + 7,$$

riferita all'origine O e agli assi x ed y, ha per equazione

$$2\,y' = 4\,x' + 7$$

quando si riferisca alla nuova origine

$$O'\left(\bar{1};\ \frac{3}{2}\right)$$

e ai nuovi assi x' ed y', ecc.

Lo studioso tracci accuratamente sul piano tutte le rette che hanno servito d'esempio in questo capitolo.

CAPITOLO SETTIMO.

I. La condizione, che lega l'ascissa x alla ordinata y sia ora

$$y = -x^2 + x + 2:$$

anzitutto fra i punti del piano, che hanno la medesima ascissa α, ve ne è sempre uno ed uno solo il quale soddisfa alla condizione superiore; giacchè dalla sostituzione di α ad x in

$$f(x) = -x^2 + x + 2$$

si è condotti al numero reale ed unico

$$f(\alpha) = -\alpha^2 + \alpha + 2:$$

questo numero $f(\alpha)$ può anche essere 0 per valori determinati di α, ma non può essere indeterminato, se tale non è α.
Così corrispondentemente alle ascisse

$$-\frac{5}{2}, \quad -2, \quad -\frac{3}{2}, \quad -1, \quad -\frac{1}{2}, \text{ ecc.}$$

si trovano (algoritmo $[A_1]$) i punti le cui ordinate sono rispettivamente:

$$-6\frac{3}{4}, \quad -4, \quad -1\frac{3}{4}, \quad 0, \quad -1\frac{1}{4}, \text{ ecc.}:$$

punti tutti riportati nella tabella che segue, e dei quali i primi tre

cadono nella regione delle y negative, i sette successivi in quella delle positive, gli ultimi tre in quella delle negative: essi sono individuati sul piano nella fig. 11.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
....			
$-\frac{5}{2}$	$-6\frac{3}{4}$	$+1$	$+2$
-2	-4	$+\frac{3}{2}$	$+1\frac{1}{4}$
$-\frac{3}{2}$	$-1\frac{3}{4}$	$+2$	0
-1	0	$+\frac{5}{2}$	$-1\frac{3}{4}$
$-\frac{1}{2}$	$+1\frac{1}{4}$	$+3$	-4
0	$+2$	$+\frac{7}{2}$	$-6\frac{3}{4}$
$+\frac{1}{2}$	$+2\frac{1}{4}$	....	

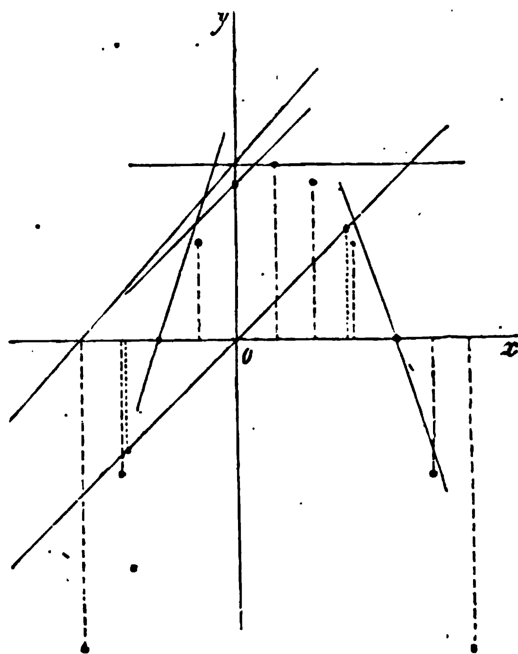


Fig. 11.

Conseguenza necessaria della legge di continuità, alla quale va

soggetto il polinomio

$$f(x) = -x^2 + x + 2,$$

si è che, considerando ascisse, — o intermedie a due qualsiansi fra quelle riportate nel quadro, o inferiori alla più piccola, o superiori alla più grande di queste — si ottengono punti che soddisfano alla condizione voluta: e ciò costantemente, per quanto piccola sia la differenza fra due ascisse considerate successivamente. In altre parole, si possono trovare punti soddisfacenti alla condizione

$$y = -x^2 + x + 2$$

tanto vicini quanto si vuole, in modo da dover ritenere che la successione dei medesimi sul piano forma un tratto continuo (una *linea,* un *luogo*). Questo luogo può considerarsi, come il cammino percorso da un punto che scorra sul piano occupando ad ogni istante posizioni diverse, in ciascheduna delle quali però le sue coordinate soddisfino alla condizione

$$y = -x^2 + x + 2.$$

Un osservatore, che guardi il foglio del disegno e segua tale punto mobile nel suo cammino, vedrà il medesimo procedere costantemente o verso destra o verso sinistra, a seconda della direzione presa dal punto sin da principio. Infatti, se il punto s'avviò, procedendo da sinistra verso destra (destra e sinistra dell'osservatore), non potrà mai ritornare da destra verso sinistra; giacchè in questo caso vi sarebbero due o più punti del luogo corrispondenti ad una unica ascissa α, il che non è. Talchè, considerando appunto che il movimento iniziale abbia luogo da sinistra verso destra, si dirà che esso avviene costantemente nello stesso senso. — Non si sa in quale regione delle y, se nella positiva cioè o nella negativa, si troverà il punto mobile nel caso di ascisse intermedie a quelle riportate nella tabella; è certo solamente che per nessuna di ascisse siffatte il punto potrà occupare una posizione infinitamente lontana dall'asse x, giacchè $f(x)$ non si trasforma in un numero indeterminato, se tale non è anche x. Si può verificare subito inoltre che per ascisse inferiori alla più piccola

$$-\frac{5}{2}$$

di quelle riportate nel quadro, o superiori alla più grande

$$+\frac{7}{2}$$

fra le medesime, l'ordinata è costantemente negativa e decrescente (crescente in valore assoluto), ossia il punto cade costantemente nella regione delle y negative e si allontana senza limite dall' asse x. Infatti, se θ e θ' sono due numeri positivi qualsiansi, è certo che

$$-\frac{5}{2}-\theta$$

può rappresentare qualunque ascissa minore di $-\frac{5}{2}$, e

$$\frac{7}{2}+\theta',$$

qualunque ascissa maggiore di $\frac{7}{2}$. Inoltre si ha, nel caso attuale, in cui

$$f(x)=-x^2+x+2,$$

$$f\left(-\frac{5}{2}-\theta\right)=f\left(-\frac{5}{2}\right)-\theta.\frac{f'\left(-\frac{5}{2}\right)}{1}+\theta^2.\frac{f''\left(-\frac{5}{2}\right)}{1.2}=$$

$$=-\left(\frac{27}{4}+6\theta+\theta^2\right)=\text{numero negativo e decrescente col crescere di } \theta:$$

$$f\left(\frac{7}{2}+\theta'\right)=f\left(\frac{7}{2}\right)+\theta'.\frac{f'\left(\frac{7}{2}\right)}{1}+\theta'^2.\frac{f''\left(-\frac{7}{2}\right)}{1.2}=$$

$$=-\left(\frac{27}{4}+6\theta'+\theta'^2\right)=\text{numero negativo e decrescente col crescere di } \theta':$$

il che prova quanto volevasi dimostrare. Dunque, considerando il cammino percorso dal punto prima che esso arrivi alla posizione di ascissa $-\frac{5}{2}$, si può dire, che il punto medesimo, in moto nella regione delle y negative, da una distanza infinitamente grande, procede costantemente da sinistra verso destra e si avvicina di continuo all'asse x; considerando il cammino oltre la posizione di ascissa $\frac{7}{2}$, si può dire che il punto nella regione delle y negative s'allontana costantemente dall'asse x, procedendo inoltre del continuo da sinistra verso destra; quanto poi al cammino compreso fra le due posizioni

$$\text{d'ascissa } -\frac{5}{2} \quad \text{e} \quad \text{d'ascissa } +\frac{7}{2},$$

non può dirsi altro, per ora, se non che il punto, trovasi costante-

mente a distanza finita dell'asse x, e procede costantemente da sinistra verso destra.

Se contemporaneamente un punto, scorrendo sul piano, descrive il luogo

$$y = -x^2 + x + 2$$

e un altro percorre una retta, per esempio la

$$y = x,$$

può accadere che i punti mobili passino entrambi per le stesse posizioni?: in altre parole, può darsi che la retta e il luogo abbiano punti comuni, ossia che si seghino vicendevolmente?

È certo che se esistono queste posizioni comuni, debbono per esse sussistere simultaneamente e la condizione pei punti del luogo ora discusso e quella pei punti della retta; talchè, indicando con X e Y le coordinate di queste posizioni comuni supposte, deve essere

$$Y = -X^2 + X + 2,$$
$$Y = X:$$

e queste relazioni vanno considerate come due equazioni a due incognite; la risoluzione delle quali proverà se è possibile soddisfare alle medesime con numeri reali, ossia farà conoscere se i due luoghi si tagliano o no. Si trova, mediante l'eliminazione,

$$X = Y = \pm\sqrt{2} = \pm 1,414;$$

dunque i due luoghi si tagliano difatti e sono due i punti di sezione; il punto

$$(1,414;\ 1,414)$$

e l'altro

$$(\bar{1},414;\ \bar{1},414):$$

si può tracciare tosto sulla fig. 11 la retta segante e individuare su questa i due punti trovati.

— Parimenti pei supposti punti comuni al luogo

$$y = -x^2 + x + 2$$

e alla retta condotta pei punti

$$(\bar{2},\ 0);\quad \left(0,\ \frac{9}{4}\right),$$

ossia alla retta

$$8y = 9(x + 2),$$

si ha:

$$-X^2 + X + 2 = \frac{9}{8}(X + 2);$$

condizione equivalente all'altra:

$$\left(2X + \frac{1}{8}\right)^2 = -\frac{63}{64},$$

che non può essere soddisfatta da alcun numero reale: dunque il luogo

$$y = -x^2 + x + 2$$

e la retta

$$8y = 9(x + 2)$$

non hanno alcun punto comune [veggasi la fig. 11, nella quale si è tracciata la retta in questione].

Siccome poi, qualunque sia il valore numerico delle costanti di una retta, la sua equazione è sempre di primo grado, così le ascisse dei punti comuni ad essa e al luogo che ora si discute saranno sempre date da una equazione di secondo grado, le cui radici potranno essere entrambe reali o no: cosicchè il luogo sarà segato dalla retta o in due punti o in nessuno. In particolare l'asse delle x (retta $y = 0$) segherà il luogo in due punti o in nessuno, e la risultante, che darà le ascisse dei supposti punti di sezione, sarà:

$$-X^2 + X + 2 = 0;$$

in altri termini, le ascisse dei medesimi non rappresenteranno altra cosa se non che le radici reali dell'equazione

$$-x^2 + x + 2 = 0.$$

Se si osservano le coordinate date dall'antecedente tabella, si vede che l'ordinata [ossia la funzione $f(x)$] è nulla per le ascisse $\bar{1}$ e 2: le due radici della proposta sono pertanto $\bar{1}$ e 2, e, come nuovo criterio sulla natura del luogo che si studia, deve dirsi fin d'ora che il medesimo non può segare l'asse x in altri punti oltre a quei due indicati poc'anzi.

II. Se la condizione che lega le ascisse alle ordinate è

$$y=f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+\frac{2}{3},$$

si trovano le coordinate del quadro seguente:

x	$f(x)$	x	$f(x)$
.....			
-3	$-6\frac{5}{6}$	1	$-1\frac{1}{2}$
$-\frac{5}{2}$	$-2\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$-2\frac{1}{3}$
-2	0	2	$-2\frac{2}{3}$
$-\frac{3}{2}$	$+1\frac{5}{12}$	$\frac{5}{2}$	$-2\frac{1}{4}$
-1	$+1\frac{5}{6}$	3	$-\frac{5}{6}$
$-\frac{1}{2}$	$+1\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$	$+1\frac{5}{6}$
0	$+\frac{2}{3}$	4	$+6$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{12}$	.....	

I primi due punti cadono nella regione delle y negative; i cinque successivi in quella delle positive; i sei, che vengono dopo, in quella delle negative, e finalmente i due ultimi in quella delle positive, ed è facile individuarli (fig. 12).

Considerazioni fatte in base alla legge di continuità, in modo identico a quello tenuto nell'esempio precedente, conducono a ritenere la successione dei punti che si possono segnare sul piano e che soddisfano alla condizione

$$y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^3}{2}-2x+\frac{2}{3}$$

come il cammino percorso da un punto che si muove da sinistra a destra sul foglio del disegno. Anche qui non può dirsi se i punti

inseriti fra quelli riportati nel quadro cadranno piuttosto in una regione delle y che nell'altra; solamente è certo che nessuno di essi

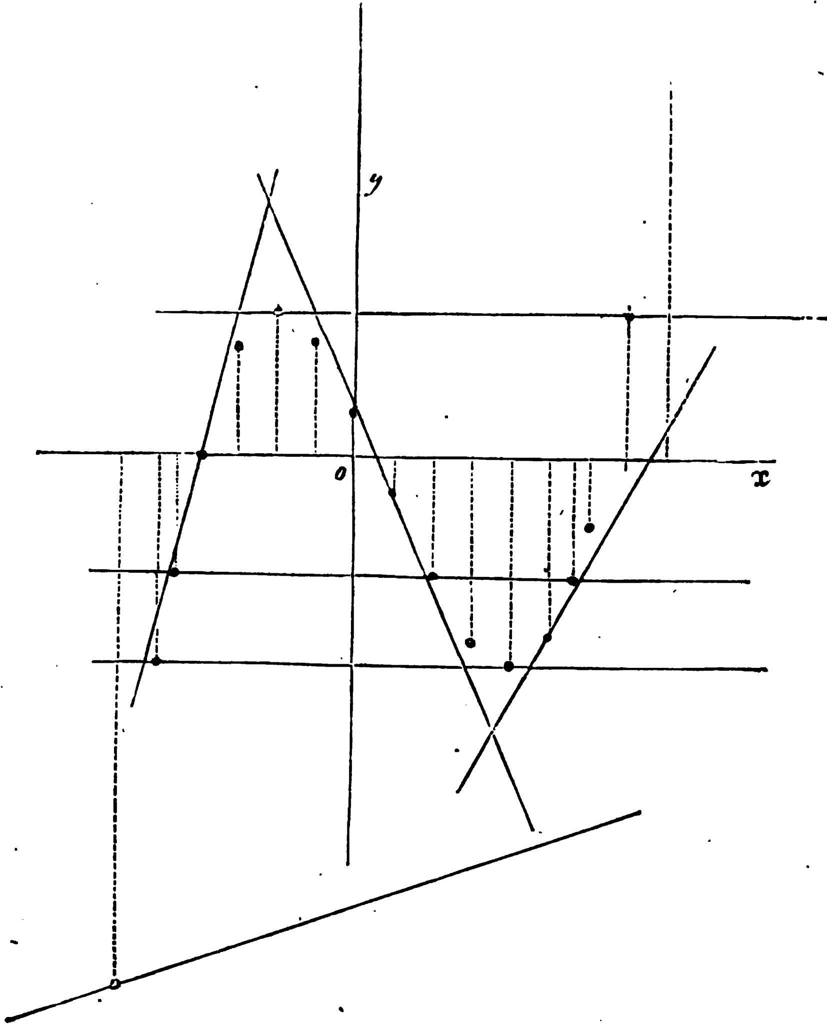


Fig. 12.

cadrà a distanza infinitamente grande dall'asse x. Però quanto a tutti i punti possibili aventi ascisse inferiori a -3, superiori a $+4$, si trova dando a θ e θ' i significati attribuiti ai medesimi nel-

l'esempio precedente, ed osservando che quivi è:

$$f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+\frac{2}{3},$$

$$f(-3-\theta)=f(-3)-\theta.\frac{f'(-3)}{1}+\theta^2.\frac{f''(-3)}{1.2}-\theta^3.\frac{f'''(-3)}{1.2.3}=$$

$$=-\left\{6\frac{5}{6}+10.\theta+\frac{7}{2}\theta^2+\frac{1}{3}\theta^3\right\}=\text{numero negativo e decrescente}$$

col crescere di θ:

$$f(4+\theta')=f(4)+\theta'.\frac{f'(4)}{1}+\theta'^2.\frac{f''(4)}{1.2}+\theta'^3.\frac{f'''(4)}{1.2.3}=$$

$$=+\left\{6+10.\theta'+\frac{21}{6}\theta'^2+\frac{1}{3}\theta'^3\right\}=\text{numero positivo e crescente}$$

col crescere di θ'.

Cosicchè pel cammino che precede la posizione di ascissa -3 deve dirsi, che il punto si trova nella regione delle y negative, è in movimento da una distanza infinitamente grande, procede continuatamente da sinistra verso destra e va avvicinandosi all'asse x; — pel cammino che segue la posizione di ascissa $+4$ deve dirsi, che il punto si trova nella regione delle y positive, procede costantemente da sinistra verso destra, s'allontana senza limite dall'asse x; — pel cammino, intermedio alle due posizioni poc' anzi menzionate, null'altro può dirsi se non che, su questo il punto non s'allontana mai dall'asse che per distanze finite, e che procede costantemente da sinistra verso destra.

La condizione alla quale debbono soddisfare, se esistono, i punti comuni al luogo

$$y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+\frac{2}{3}$$

e alla parallela all'asse x, condotta pel punto

$$\left(1;\ -\frac{3}{2}\right).$$

ossia alla retta

$$y=-\frac{3}{2},$$

è

$$\frac{X^3}{3}-\frac{X^2}{2}-2X+\frac{2}{3}=-\frac{3}{2};$$

ossia

$$\frac{X^3}{3}-\frac{X^2}{2}-2X+\frac{13}{6}=0.$$

Ora siccome

$$\left(1;-\frac{3}{2}\right)$$

è uno dei punti della linea, così esso è anche uno dei richiesti punti di sezione; l'equazione precedente ha necessariamente per radice l'unità, e il primo membro di essa può in conseguenza spezzarsi in fattori così:

$$(X-1)\left(\frac{1}{3}X^2-\frac{1}{6}X-\frac{13}{6}\right).$$

La condizione

$$\frac{1}{3}X^2-\frac{1}{6}X-\frac{13}{6}=0,$$

equivalente all'altra

$$\left(2X-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{105}{4};$$

fornisce le ascisse

$$2{,}81; \quad -2{,}31$$

di altri due punti di sezione. Siccome i punti trovati cadono tutti e tre sulla orizzontale

$$y=-\frac{3}{2},$$

così le loro ordinate sono tutte e tre uguali fra loro e ciascheduna uguale a $-\frac{3}{2}$.

Conchiudendo, i punti di sezione sono:

$$\left(1;-\frac{3}{2}\right): \quad \left(2{,}81;-\frac{3}{2}\right): \quad \left(-2{,}31;-\frac{3}{2}\right).$$

(Veggasi la fig. 12, nella quale si è condotta la retta e si sono segnati i tre punti di sezione).

Analogamente, per conoscere se la retta che è inclinata sull'asse x dell'angolo T, per cui

$$\text{tang}\, T=\frac{1}{3},$$

e che passa pel punto del luogo

$$\left(-3;\quad -6\frac{5}{6}\right);$$

la equazione della quale è quindi

$$6y = 2x - 35;$$

seghi il luogo in altri punti oltre quello ora indicato, si scrive la risultante

$$\frac{X^3}{3} - \frac{X^2}{2} - 2X + \frac{2}{3} = \frac{X}{3} - \frac{35}{6},$$

equivalente a

$$\psi(X) = 2X^3 - 3X^2 - 14X + 39 = 0.$$

A questa soddisfa evidentemente il numero -3, ascissa del punto situato sul luogo per cui si è condotta la retta; perciò $\psi(X)$ è divisibile per $X + 3$, e si trova infatti

$$\psi(X) = (X + 3).(2X^2 - 9X + 13).$$

Ora la condizione

$$2X^2 - 9X + 13 = 0,$$

equivalente all'altra

$$\left(2X - \frac{9}{2}\right)^2 = -\frac{23}{4},$$

non è soddisfatta da alcun numero reale; perciò la retta

$$6y = 2x - 35.$$

non sega il luogo che in quell'unico punto

$$\left(-3;\ -6\frac{5}{6}\right)$$

pel quale essa è stata condotta (veggasi la fig. 12).

Qualunque sia il valore numerico delle costanti di una retta, l'equazione della medesima è sempre di primo grado; perciò le ascisse comuni ad essa e al luogo che si discute, saranno sempre date da una equazione di terzo grado, e i punti medesimi potranno essere tre al più: in particolare l'asse delle x (retta $y = 0$) sega il luogo in tre punti al più, e la risultante che dà le ascisse dei supposti punti

di sezione, è

$$\frac{X^3}{3}-\frac{X^2}{2}-2X+\frac{2}{3}=0;$$

in altri termini, le àscisse dei medesimi non sono altra cosa che le radici reali dell'equazione

$$\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+\frac{2}{3}=0.$$

Se si osservano le coordinate date dall'antecedente tabella, si scorge che l'ordinata [ossia la funzione $f(x)$] è nulla per

$$x=-2$$

e passa dallo stato positivo al negativo e viceversa, fra le ascisse 0 ed $\frac{1}{2}$ e fra le ascisse 3 e $\frac{7}{2}$: le tre radici dell'equazione superiore pertanto sono l'una uguale a -2, le altre due comprese nei due intervalli indicati; e, come nuovo criterio sulla natura del luogo che si studia, deve dirsi che il medesimo non può segare l'asse x in altri punti oltre a quei tre indicati poc'anzi.

III. Parimenti per la condizione

$$y=f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x-3$$

si trovano i punti riportati nel quadro seguente:

x	$f(x)$	x	$f(x)$
.....			
-3	$-10\frac{1}{2}$	0	-3
$-\frac{5}{2}$	$-7\frac{7}{12}$	$\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{3}$
-2	$-5\frac{2}{3}$	1	$-1\frac{1}{6}$
$-\frac{3}{2}$	$-4\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\frac{3}{4}$
-1	$-3\frac{5}{6}$	2	$+3\frac{2}{3}$
$-\frac{1}{2}$	$-3\frac{5}{12}$	.....	

Quelli fra i punti sopra indicati che hanno per ascisse

$$-3, \quad -\frac{5}{2}, \quad -2, \quad -\frac{3}{2}, \quad -1, \quad -\frac{1}{2}, \quad 0, \quad \frac{1}{2}, \quad 1$$

cadono nella regione delle y negative, mentre quelli corrispondenti

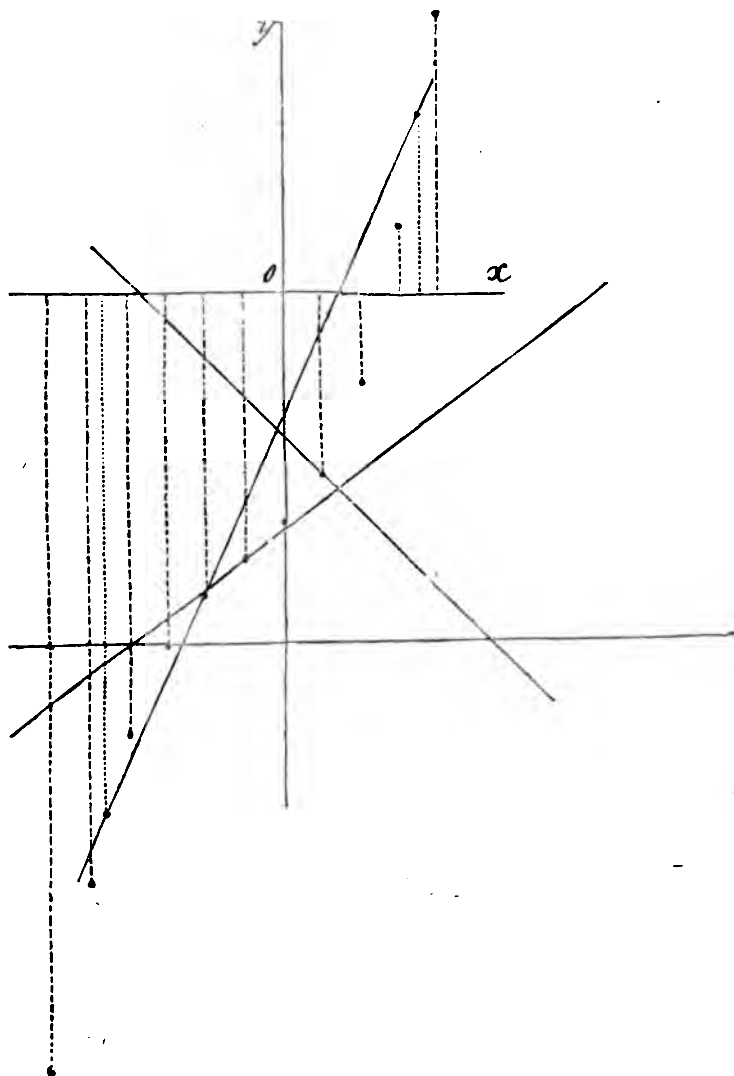


Fig. 13.

alle altre due ascisse $\frac{3}{2}$ e 2 cadono nella regione delle y positive (fig. 13).

Si può verificare poi, che tutti i valori di y corrispondenti ad ascisse qualsiansi minori di -3 sono negativi, mentre quelli corrispondenti ad ascisse superiori a $+2$ sono positivi. Infatti, attribuendo alle lettere θ e θ' i significati dati alle medesime nei due esempi precedenti, $-3-\theta$ rappresenterà qualsiasi numero inferiore a -3 e $2+\theta'$ qualsiasi numero superiore a 2, e siccome in questo caso è

$$f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x-3,$$

così si ha:

$$f(-3-\theta)=f(-3)-\theta\,.\frac{f'(-3)}{1}+\theta^2.\frac{f''(-3)}{1.2}-\theta^3\frac{f'''(-3)}{1.2.3}=$$

$$=-\left(\frac{21}{2}+7\,\theta+\frac{5}{2}\theta^2+\frac{1}{3}\theta^3\right)=\text{numero negativo decrescente continuamente col crescere di }\theta;$$

$$f(2+\theta')=f(2)+\theta'.\frac{f'(2)}{1}+\theta'^2\frac{f''(2)}{1.2}+\theta'^3.\frac{f'''(2)}{1.2.3}=$$

$$=+\left(\frac{11}{3}+7\,\theta'+\frac{15}{6}.\theta'^2+\frac{1}{3}\theta'^3\right)=\text{numero positivo crescente continuamente col crescere di }\theta'.$$

Anche per questo esempio la legge di continuità permette di considerare la successione dei punti, che soddisfano alla condizione posta, come il cammino percorso da un punto mobile che procede costantemente da sinistra verso destra; nella parte di cammino, che precede la posizione d'ascisse -3, il punto mobile si trova nella regione delle y negative e viene man mano continuamente avvicinandosi all'asse x; — nella parte di cammino successiva alla posizione di ascissa $+2$ il punto mobile trovasi nella regione delle y positive e s'allontana senza limite dall'asse x; — quanto alla parte di cammino intermedia fra le due posizioni suddette, nulla può concludersi sin qui, se non che, il punto, procedendo continuamente da sinistra verso destra, non s'allontana mai per tutto questo intervallo illimitatamente dall'asse x.

Per trovare, se esistono, i punti comuni a questo luogo

$$y=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x-3$$

ed alla retta

$$6y=-6x-11$$

si ricorre alla risultante

$$\frac{X^3}{3} + \frac{X^2}{2} + X - 3 = -X - \frac{11}{6},$$

in cui X può assumere i soli valori delle ascisse dei supposti punti comuni. L'equazione precedente si riduce a

$$\psi(X) = 2X^3 + 3X^2 + 12X - 7 = 0:$$

$\psi(X)$ presenta un solo cambiamento di segno, dunque $\psi(X) = 0$ ha una sola radice reale positiva. $X = 0$ fornisce

$$\psi(0) = -7,$$

$X = 1$

$$\psi(1) = +10;$$

e perciò quest'unica radice è compresa fra 0 ed 1. $X = 0,5$ dà

$$\psi(0,5) = 0,$$

ossia 0,5 è il valore cercato, e si ha:

$$\psi(X) = (X - 0,5) \cdot (2X^2 + 4X + 14):$$

la condizione

$$2X^2 + 4X + 14 = 0,$$

equivalente a

$$(X + 1)^2 = -6,$$

non può essere soddisfatta nemmeno da alcun valore negativo di X, cosicchè il luogo che si discute e la retta di equazione

$$6y = -6x - 11$$

si segano in un punto solo, il punto che ha per ascissa 0,5 e per ordinata

$$-0,5 - \frac{11}{6} = -2\frac{1}{3}.$$

(Veggasi la fig. 13). —

Parimenti pei punti di sezione, che possono supporsi, della retta

$$y = -4\frac{1}{2}$$

parallela all'asse x e del luogo in questione, deve essere soddisfatta la risultante

$$\frac{1}{3}X^3 + \frac{1}{2}X^2 + X - 3 = -\frac{9}{2},$$

ossia la

$$\psi(X) = \frac{1}{3} X^3 + \frac{1}{2} X^2 + X + \frac{3}{2} = 0.$$

Ora la

$$\psi(X) = 0$$

non è verificata da alcun numero positivo; ma la trasformata

$$\psi(-X) = 0 = \Psi(X) = \frac{1}{3} X^3 - \frac{1}{2} X^2 + X - \frac{3}{2} = 0$$

può avere radici reali positive.

È limite superiore generale

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} + 1 = 3 \text{ circa;}$$

il numero 1 dà

$$\Psi(1) = -\frac{2}{3}$$

e non è più limite; perciò fra 3 ed 1 è compreso un numero dispari di radici; la sostituzione ad X del numero 1,5 dà

$$\Psi(1{,}5) = 0;$$

perciò 1,5 è radice della trasformata; $-1{,}5$ lo è della proposta; $\psi(X)$ è divisibile per $X + 1{,}5$ e si trova

$$\psi(X) = (X + 1{,}5)\left(\frac{1}{3} X^2 + 1\right).$$

la condizione

$$\frac{1}{3} X^2 + 1 = 0$$

non è soddisfatta da alcun valore reale di X; quindi la retta

$$y = -4\frac{1}{2}$$

sega il luogo che si discute nell'unico punto d'ascissa $-\frac{3}{2}$ e di ordinata $-4\frac{1}{2}$ (veggasi la fig. 13).

In modo analogo si trova che la retta inclinata sull'asse x dell'angolo T, per cui

$$\operatorname{tang} T = \frac{11}{5},$$

e che passa pel punto

$$\left(-1, \quad -3\frac{5}{6}\right),$$

ossia che ha per equazione

$$30y = 66x - 49,$$

sega il luogo in punti, le cui ascisse sono date dalla risultante

$$\frac{X^3}{3} + \frac{X^2}{2} + X - 3 = \frac{66X}{30} - \frac{49}{30},$$

ossia dalla

$$\psi(X) = 0 = 10X^3 + 15X^2 - 36X - 41.$$

Il punto

$$\left(-1; \quad -3\frac{5}{6}\right),$$

per cui è stata condotta la retta, è punto anche del luogo, come risulta dalla tabella: perciò

$$\psi(X) = 0$$

è soddisfatta da

$$X = -1;$$

in altri termini $\psi(X)$ è divisibile per $X + 1$. Si trova infatti

$$\psi(X) = (X + 1)(10X^2 + 5X - 41).$$

La condizione

$$10X^2 + 5X - 41,$$

equivalente all'altra

$$(X + 0{,}25)^2 = 4{,}1625,$$

è soddisfatta dai numeri

$$1{,}79; \quad -2{,}29;$$

ai quali corrispondono per Y i valori

$$2{,}304; \quad -6{,}670.$$

Perciò la retta di cui è questione sega il luogo in tre punti: nel punto

$$\left(-1; \quad -3\frac{5}{6}\right)$$

pel quale essa è stata condotta, e nei punti

$$(1{,}79; \quad 2{,}304); \quad (-2{,}29; \quad -6{,}670)$$ (veggasi la fig. 13).

Le costanti della retta possono essere qualsiansi; ma la sua equazione è sempre di primo grado; cosicchè la risultante da cui si deducono le ascisse dei punti comuni alla medesima e al luogo che si discusse è sempre di terzo grado, o, in altre parole, questi punti sono tre al più. In particolare l'asse delle x (retta $y = 0$) può segare il luogo in tre punti al più; la risultante per questo caso è:

$$\frac{X^3}{3}+\frac{X^2}{2}+X-3=0;$$

ossia le ascisse dei punti di sezione non sono altra cosa se non che le radici della equazione

$$\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x-3=0.$$

Se si osservano le coordinate offerte dalla tabella, si nota che l'ordinata [ossia la funzione $f(x)$] passa dallo stato negativo al positivo fra le ascisse 1 e $\frac{3}{2}$: è certo quindi che in questo intervallo il luogo sega almeno una volta l'asse x, ossia che fra 1 e $\frac{3}{2}$ cade almeno una radice dell'equazione superiore; ma la circostanza del non figurare altri cambiamenti di segno nelle ordinate riportate lascia nella incertezza, se gli altri due punti di sezione manchino difatto, oppure se, esistendo, le loro ascisse siano comprese fra le ascisse considerate nel quadro, ed occorrano nuove e più vicine sostituzioni per limitarle. È indubitato qui che, ove tali due radici mancassero, per quante sostituzioni e calcoli di questo genere si facessero, si rimarrebbe sempre nel dubbio. Cosicchè, coi mezzi di cui ora si può disporre, si rimane incerti se il luogo seghi l'asse in tre punti o in uno solo.

CAPITOLO OTTAVO.

La condizione, alla quale debbono soddisfare le coordinate dei punti da costruirsi, sia ora rappresentata dalla relazione generale di grado emmesimo

$$y = f(x) = a\, x^m + b\, x^{m-1} + c\, x^{m-2} + \dots$$

— Tutto quello che, in base alla legge di continuità, si è detto trattando il caso particolare

$$y = -x^2 + x + 2,$$

e fu ripetuto per le altre due relazioni dianzi discusse, vale anche per questa condizione generale. Così, sostituendo in $f(x)$ ad x il numero reale α, positivo o negativo, si ottiene sempre un valore, ed un unico valore reale $f(\alpha)$; in altre parole, fra i punti del piano aventi la ascissa comune α ve ne è sempre uno, ed uno solo, che soddisfa alla condizione generale

$$y = f(x):$$

— per quanto piccola sia la differenza fra due ascisse successive, le ordinate corrispondenti sono diverse fra loro; cosicchè si ottengono punti tanto prossimi quanto si vuole, i quali convengono alla condizione superiore; e due qualsiansi di essi non saranno mai tanto vicini, perchè non si possa inserire fra i medesimi un terzo punto che

esso pure soddisfi alla stessa condizione; cosicchè tutti i punti individuati possono venire considerati come le posizioni successive occupate da un unico punto, il quale scorrendo sul piano descrive una linea continua, un luogo. — Il carattere distintivo di tale movimento è che esso ha luogo costantemente o da sinistra verso destra, o da destra verso sinistra, e non nei due sensi alternativamente; e ciò evidentemente, perchè ad una ascissa α non corrisponde che una sola ordinata $f(\alpha)$. Per fissare le idee si riterrà costantemente, in seguito, che questa traslazione avvenga da sinistra verso destra.

Si è veduto che, se

$$f(x) = a\,x^m + b\,x^{m-1} + \ldots$$

è di grado dispari, è possibile trovare due numeri α e $-\omega$, positivo il primo, negativo il secondo, tali che il risultato $f(\alpha)$, o quello ottenuto con qualunque altro numero maggiore di α, ed il coefficiente a abbiano lo stesso segno; e che il risultato $f(-\omega)$, o quello ottenuto con qualunque numero minore di $-\omega$, ed il coefficiente a abbiano segni contrari. Perciò per ascisse minori di una certa ascissa negativa tutte le ordinate hanno lo stesso segno; i punti del luogo cadono tutti in una delle due regioni delle y: per ascisse maggiori di una certa ascissa positiva tutte le ordinate hanno pure segno comune, ma contrario a quello delle ordinate precedenti; e i punti del luogo cadono tutti in una stessa regione delle y, e precisamente nella regione opposta a quella in cui cadevano i punti considerati poc'anzi. È ciò che avveniva in particolare nei due esempi ultimi trattati. — Se

$$f(x) = a\,x^m + b\,x^{m-1} + \ldots$$

è di grado pari esistono due numeri α e $-\omega$, positivo il primo, negativo il secondo, tali che i risultati $f(\alpha)$ e $f(-\omega)$, o quelli ottenuti con qualsiasi altro numero maggiore di α e minore di $-\omega$, hanno segno comune ed uguale al segno del coefficiente a; perciò per ascisse minori di una certa ascissa negativa, o per ascisse maggiori di una certa ascissa positiva, le ordinate hanno tutte lo stesso segno e i punti del luogo cadono tutti nella medesima regione delle y. È ciò che avveniva nel primo dei tre esempi trattati precedentemente. — Dunque, sia dispari o pari il grado di $f(x)$, è certo che, considerando ascisse positive crescenti o negative decrescenti, si arriva a valori speciali, pei quali, e per tutti i successivi, le ordinate hanno lo stesso segno.

— Fra questi due stati estremi delle ordinate ve ne sono degli intermedi, nei quali esse possono risultare or positive or negative, ossia i punti possono cadere ora in una delle due regioni delle y, ora nell' altra; ma è bene da notarsi che in nessuno di questi stati intermedi l' ordinata diventa infinitamente grande, ossia il punto s' allontana infinitamente dall' asse.

Può dirsi aduuque, che il punto il quale descrive il luogo procede costantemente da sinistra verso destra, si trova in movimento da una distanza infinitamente grande in una delle due regioni delle y, e viene avvicinandosi ai due assi, può passare una o più volte da una regione all' altra; e poscia si avvia, mantenendosi sempre in una delle due regioni delle y verso un punto infinitamente distante, allontanandosi sempre dai due assi.

La retta qualsiasi

$$y = a' x + b'$$

sega il luogo

$$y = f(x) = a x^m + b x^{m-1} + \dots$$

in punti le cui ascisse sono le radici della risultante;

$$f(X) - a' X - b' = 0,$$

le quali possono essere m al più. Perciò una retta sega il luogo

$$y = f(x)$$

al più in m punti. Come caso particolare l' asse delle x, ossia la retta $y = 0$, può tagliare la curva in m punti al più, e le ascisse di questi m punti di sezione possibili, date da

$$f(X) = 0,$$

rappresentano le m radici reali dell' equazione

$$f(x) = 0.$$

Tre dei punti di sezione di una retta col luogo

$$y = f(x) = a x^m + \dots$$

non possono essere in generale vicini quanto si vuole; — o in altre parole *tre punti* M', M, M'' *del luogo non si trovano più in linea retta, quando le loro distanze rispettive sono abbastanza piccole.*

Infatti se (fig. 14)

$$\alpha - H', \quad \alpha, \quad \alpha + H'$$

$$f(\alpha - H'), \quad f(\alpha), \quad f(\alpha + H'')$$

denotano rispettivamente le ascisse

$$\overline{OP'}, \quad \overline{OP}, \quad \overline{OP''},$$

e le corrispondenti ordinate

$$\overline{P'M'}, \quad \overline{PM}, \quad \overline{P''M''}$$

dei tre punti

$$M', \quad M, \quad M'';$$

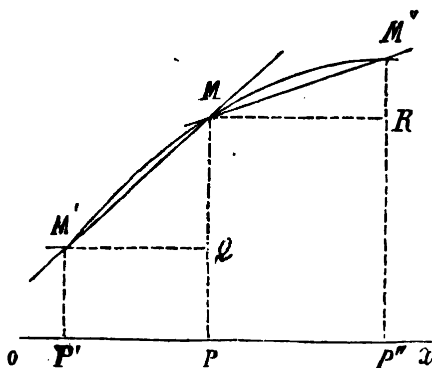


Fig. 14.

e se le rette MR, $M'Q$ sono parallele all'asse x, si ha:

$$\overline{M'Q} = H'; \quad \overline{MR} = H'';$$

$$\overline{QM} = \overline{PM} - \overline{PQ} = \overline{PM} - \overline{P'M'} = f(\alpha) - f(\alpha - H'),$$

$$\overline{RM''} = \overline{P''M''} - \overline{P''R} = \overline{P''M''} - \overline{PM} = f(\alpha + H'') - f(\alpha).$$

E perciò

$$\operatorname{tang} MM'Q = \frac{\overline{QM}}{\overline{M'Q}} = \frac{f(\alpha) - f(\alpha - H')}{H'}$$

$$\operatorname{tang} M''MR = \frac{\overline{RM''}}{\overline{MR}} = \frac{f(\alpha + H'') - f(\alpha)}{H''},$$

ossia

$$\begin{cases} \tang MM'Q = f'(\alpha) - H' \cdot \frac{f''(\alpha)}{1 \cdot 2} + H'^2 \cdot \frac{f'''(\alpha)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \dots \\ \tang M''MR = f'(\alpha) + H'' \cdot \frac{f''(\alpha)}{1 \cdot 2} + H''^2 \cdot \frac{f'''(\alpha)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \end{cases}$$

Ora ad H' può assegnarsi un valore piccolo abbastanza, perchè il termine

$$- H' \frac{f''(\alpha)}{1 \cdot 2},$$

e per tale valore di H', e per qualunque altro valore minore, superi la somma di tutti i termini che lo seguono nel primo degli sviluppi precedenti: per valori siffatti di H' che corrispondono evidentemente al caso in cui M ed M' siano vicinissimi, è

$$\tang MM'Q < f'(\alpha).$$

Parimenti ad H'' può assegnarsi un valore piccolo abbastanza perchè il termine

$$H'' \frac{f''(\alpha)}{1 \cdot 2},$$

e per tale valore di H'' e per qualunque altro valore minore, superi da solo la somma di tutti gli altri che lo seguono nel secondo degli sviluppi precedenti: per valori siffatti di H'', che corrispondono evidentemente al caso in cui M ed M'' siano vicinissimi, è:

$$\tang M''MR > f'(\alpha).$$

Pertanto, concludendo gli angoli $MM'Q$, $M''MR$, che formano coll'asse x le seganti $M'M$ ed MM'', sono, nel caso che si considera, diversi fra loro, le seganti medesime non coincidono in una stessa retta, e quindi nemmeno i tre punti M', M, M'' sono allineati fra loro; c. d. d.: ed avviene così non solamente nel caso rappresentato dalla figura, in cui si suppone che $M'Q$, ossia H' ed MR, ossia H'' abbiano valori attuali così piccoli da soddisfare alle condizioni su discusse; ma anche se si suppone che H' ed H'' si impiccioliscano senza limite, ossia che i punti M' M, M'' vadano avvicinandosi partendo dalle posizioni rispettive attualmente occupate.

Suppongasi che M'' ed M' vadano accostandosi ad M, ossia che le due seganti $M'M$ ed MM'' ruotino attorno ad M in senso opposto. Se fra le posizioni occupate da M' e da M'' si fissano le

due m' ed m'' (fig. 14 *bis*) per le quali è

$$\overline{p'P} = \overline{Pp''} = H,$$

è chiaro che le due seganti $m'M$, ossia s', Mm'', ossia s'' comprendono coll'asse x gli angoli S', S'', pei quali è

$$\begin{cases} \operatorname{tang} S' = f'(\alpha) - H.\dfrac{f''(\alpha)}{1.2} + H^2.\dfrac{f'''(\alpha)}{1.2.3} - \dots \\ \operatorname{tang} S'' = f'(\alpha) + H.\dfrac{f''(\alpha)}{1.2} + H^2.\dfrac{f'''(\alpha)}{1.2.3} + \dots \end{cases}$$

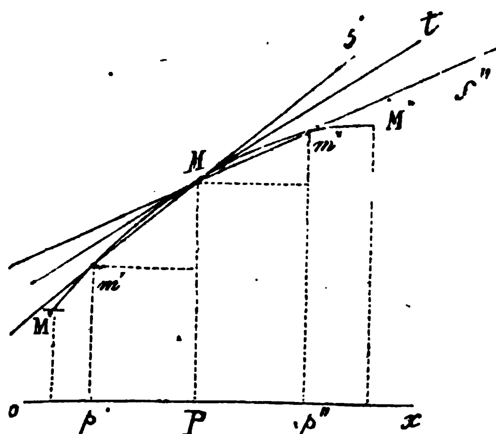


Fig. 14 *bis*.

Se ora si parte da queste posizioni, per le quali è comune, H, la differenza delle ascisse e si suppone che H vada diminuendo, è certo che i due punti m' ed m'' si avvicinano costantemente ad M e che l'angolo acuto delle seganti $m'M$ ed Mm'' va impicciolendosi finchè per $H = 0$, i tre punti m', M, m'', coincidono in un solo M, le due secanti s' ed s'' si sovrappongono nella retta unica t, la quale è perfettamente determinata, giacchè passa pel punto $M[\alpha, f(\alpha)]$ e forma colle x l'angolo T, la cui tangente trigonometrica è il valore comune che assumono tang S' e tang S'' per $H = 0$, ossia

$$\operatorname{tang} T = f'(\alpha).$$

Tale retta t, che ha per equazione

$$y - f(\alpha) = (x - \alpha) f'(\alpha),$$

dicesi *tangente* alla curva nel punto $[\alpha, f(\alpha)]$, chiamato alla sua volta *punto di contatto*, e può considerarsi come la posizione estrema che

assume una qualunque delle due secanti s' od s'', quando ruoti attorno ad uno de' suoi punti di sezione, M, sino a tanto che l'altro punto (M', se si considera la secante s', M'' se si considera la s'') coincida col punto rimasto fisso.

Qualunque sia il punto scelto sul luogo

$$y = f(x),$$

gli è certo che per esso si può condurre sempre una ed una sola tangente, giacchè per un valore reale determinato α, $f(\alpha)$ ed $f'(\alpha)$ hanno valori determinati ed unici. Però la posizione rispettiva dell'asse x, dell'arco $M'MM''$ e dalla tangente t può essere diversa da quella rappresentata dalla fig. 14 *bis*, nella quale l'arco è compreso entro l'angolo formato dalla tangente coll'asse.

— Intanto, mentre le ordinate

$$p'm', \quad p''m''$$

dei punti m' ed m'' della curva valgono rispettivamente

$$f(\alpha - H), \quad f(\alpha + H),$$

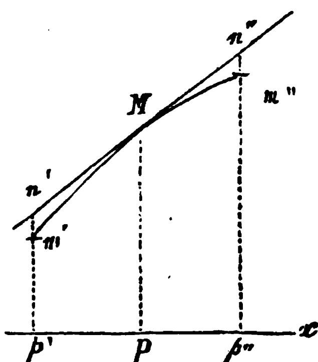


Fig. 15.

quelle di n' ed n'' (fig. 15) punti situati sulla tangente, corrispondenti alle medesime ascisse

$$\alpha - H \quad \text{ed} \quad \alpha + H$$

dei due punti precedenti m', m'', sono date dall'equazione della tangente

$$y = f(\alpha) + (x - \alpha).f'(\alpha),$$

quando in questa si pongano invece di x rispettivamente

$$\alpha - H \quad \text{ed} \quad \alpha + H,$$

ossia sono

$$f(x) - H.f'(x); \quad f(x) + H.f'(x);$$

e conseguentemente le differenze fra le prime ordinate e queste ultime valgono

$$f(x-H) - [f(x) - Hf'(x)] = H^2.\frac{f''(x)}{1.2} - H^3.\frac{f'''(x)}{1.2.3} + \ldots,$$

$$f(x+H) - [f(x) + Hf'(x)] = H^2.\frac{f''(x)}{1.2} + H^3.\frac{f'''(x)}{1.2.3} + \ldots,$$

uguaglianze che possono riunirsi nella seguente formola unica:

$$\Delta = H^2\frac{f''(x)}{1.2} \mp H^3.\frac{f'''(x)}{1.2.3} + \ldots .$$

In essa Δ rappresenta la differenza fra l'ordinata della curva e quella della tangente, ed i segni superiori si riferiscono alla parte a sinistra, gli inferiori alla parte a destra del punto di contatto M. Siccome si debbono considerare due punti m' ed m'', immediatamente a sinistra e a destra di M, così è necessario supporre H tanto piccolo, che il termine

$$H^2\frac{f''(x)}{1.2}$$

dia il segno a tutto lo sviluppo Δ.

— Nella fig. 15, Δ è negativo, giacchè, tanto immediatamente a sinistra, quanto immediatamente a destra del punto di contatto, l'ordinata della curva è superata da quella della tangente: avviene il contrario nella fig. 16, in cui l'ordinata della curva tanto a destra quanto a sinistra supera quella della tangente, ossia Δ è positivo. Può darsi eziandio, che l'arco $m'Mm''$ invece di trovarsi nella regione delle y positive, come ha luogo nelle due figure precedenti, giaccia nella regione delle y negative, come accade nelle altre due figure 15 *bis* e 16 *bis*.

Queste disposizioni diverse possono raggrupparsi due a due in base ad un carattere geometrico comune, e ad un corrispondente carattere analitico. Tanto nella fig. 15 quanto nell'altra 15 *bis*, l'arco trovasi fra la tangente e l'asse x; ossia l'arco stesso in prossimità del punto di contatto è *concavo* verso l'asse x: se nella fig. 15 $\overline{p''m''}$

$\overline{p''n''}$ valgono rispettivamente unità u, $u+u'$, e se nella fig. 15 *bis*

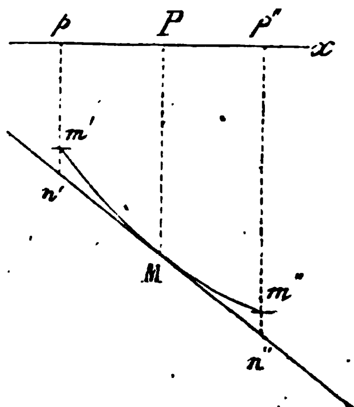


Fig. 15 *bis*.

le stesse rette di senso opposto ma della stessa lunghezza valgono rispettivamente unità $-u$, $-(u+u')$, risulta la differenza

$$\Delta = u - (u+u') = -u'$$

= numero negativo per la fig. 15; e

$$\Delta = -u + (u+u') = +u'$$

= numero positivo per la fig. 15 *bis*; ma il segno di Δ deve essere quello del termine

$$H^2 . \frac{f''(x)}{1 . 2},$$

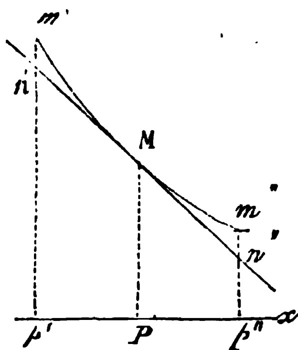


Fig. 16.

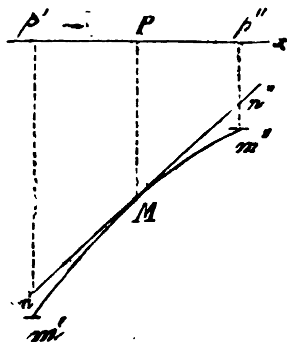


Fig. 16 *bis*.

ossia quello di $f''(x)$: e perciò $f''(x)$ deve essere negativo per la fig. 15, in cui il punto di contatto M cade nella regione delle y positive e quindi $f(x)$ è positivo; mentre $f''(x)$ deve essere positivo per

la fig. 15 *bis*, in cui, il punto di contatto M cadendo nella regione delle y negative, $f(\alpha)$ è negativa: dunque i due casi considerati sono compresi nel solo, che $f(\alpha)$ ed $f''(\alpha)$ abbiano segni contrari, ed è questo il carattere analitico corrispondente al carattere geometrico comune presentato dalle due figure, dell'*essere cioè l'arco concavo verso l'asse x*. — È inutile ripetere ragionamenti analoghi ai precedenti per provare che al carattere geometrico comune presentato dalle altre due figure (16 e 16 *bis*), del trovarsi cioè la tangente fra l'arco e l'asse, ossia dell'*essere l'arco convesso* verso l'asse corrisponde il carattere analitico del presentare $f(\alpha)$ ed $f''(\alpha)$ il medesimo segno. Perciò concludendo: *in prossimità del punto di ascissa* α *la curva è concava o convessa verso l'asse, secondo che* $f(\alpha)$ *ed* $f''(\alpha)$ *hanno segno contrario, o medesimo segno.*

Un caso particolare degno di nota è quello che si riscontra quando per un certo valore di α è

$$f'(\alpha)=0,$$

ossia quando la tangente condotta pel punto di ascissa α è *parallela all'asse x*. Anche allora però, per quanto si disse precedentemente, l'ordinata $f(\alpha)$ o supera le ordinate corrispondenti tanto ad ascisse minori quanto ad ascisse maggiori di α, o ne è superata. Secondo che ha luogo il primo di questi due casi o il secondo, dicesi che $f(x)$ pel valore particolare α attribuito ad x diventa massimo o minimo, ed anche che il luogo

$$y=f(x)$$

presenta nel punto d'ascissa α *un massimo* o *un minimo*. — Ecco alcune applicazioni di queste teorie.

I. La tangente pel punto (0, 2) alla linea

$$y=f(x)=-x^2+x+2 \quad \text{(fig. 11)}$$

comprende coll'asse x l'angolo di 45°; giacchè

$$f'(x)=-2x+1$$

per

$$x=0$$

da

$$f'(1)=1;$$

siccome poi

$$f(0)=+2 \quad \text{ed} \quad f''(0)=-2$$

hanno segni contrari, così l'arco è concavo verso l'asse, ossia l'arco giace fra la tangente e l'asse. L'equazione di questa tangente è

$$y = x + 2,$$

ed è facile tracciarla sulla figura.

II. La tangente alla stessa linea

$$y = f(x) = -x^2 + x + 2,$$

condotta pel punto

$$\left(\frac{1}{2}; \frac{9}{4}\right)$$

è parallela all'asse x, giacchè

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = (-2x + 1)_{\frac{1}{2}} = 0;$$

e in prossimità del punto di contatto l'arco è concavo verso l'asse, giacchè

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$$

è di segno contrario ad

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = -2.$$

L'ordinata

$$f\left(\frac{1}{2}\right),$$

supera le ordinate prossime a sinistra e a destra, dunque la linea presenta un massimo al punto

$$\left(\frac{1}{2}; \frac{9}{4}\right) \text{ (veggasi la fig. 11).}$$

III. La tangente alla linea

$$y = f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{2}{3}$$

pel punto

$$\left(2\frac{1}{2}; -2\frac{1}{4}\right)$$

comprende colle x l'angolo T, pel quale è

$$\text{tang } T = f'\left(\frac{5}{2}\right) = (x^2 - x - 2)_{\frac{5}{2}} = \frac{7}{4}:$$

essa ha per equazione

$$8y = 14x - 53;$$

in prossimità del punto di contatto l'arco è concavo verso l'asse, giacchè

$$f''\left(\frac{5}{2}\right) = (2x - 1)_{\frac{5}{2}} = +4$$

è di segno contrario ad

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = -2\frac{1}{4} \text{ (veggasi la fig. 12).}$$

IV. Per l'uno e per l'altro dei punti

$$\left(-1;\ \frac{11}{6}\right),\ \left(2;\ -\frac{8}{3}\right)$$

della stessa linea dell'esempio precedente

$$y = f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{2}{3}$$

la tangente è parallela all'asse x e l'arco è concavo verso l'asse medesimo in prossimità del primo e del secondo punto di contatto. Infatti

$$f'(-1) = (x^2 - x - 2)_{-1} = 0;$$

$$f'(2) = (x^2 - x - 2)_2 = 0;$$

e di più

$$f''(-1) = (2x - 1)_{-1} = -3$$

ha segno contrario ad

$$f(-1) = \frac{11}{6};$$

$$f''(2) = (2x - 1)_2 = 3$$

ha segno contrario ad

$$f(2) = -\frac{8}{3}.$$

Siccome poi $f(-1)$ supera le ordinate prossime a sinistra e a destra, così la curva presenta un massimo al punto d'ascissa -1; mentre $f(2)$ è minore delle ordinate precedenti e delle successive, e perciò

la curva presenta un minimo al punto d'ascissa 2 (veggasi la figura 12).

Nell'applicare il criterio relativo alla convessità o alla concavità, nel ricercare cioè se $f(x)$ ed $f''(x)$ hanno lo stesso segno, si possono incontrare i due casi particolari di

$$f(x) = 0,$$

o di

$$f''(x) = 0$$

Se $f(x) = 0$ il punto di contatto M cade sull'asse x, e l'arco convesso o concavo al disopra di quest'asse è concavo o convesso al disotto.

Quando si presenti un caso di questo genere si potrà stabilire nettamente l'andamento dell'arco, studiando la direzione della tangente e il segno di Δ, come si fa nei seguenti esempi.

I. La tangente pel punto (2, 0) della linea

$$y = f(x) = -x^2 + x + 2$$

forma coll'asse x un angolo ottuso T, per cui

$$\text{tang } T = -3;$$

perciò se sull'asse medesimo, a partire dal punto di contatto, si stacca, nel senso Ox, un piccolo segmento positivo $+H$, è certo che l'ordinata condotta per l'estremo di questo segmento taglierà la tangente e l'arco nella regione delle y negative.
Ora è

$$\Delta = H^2 . \frac{f''(x)}{1.2} \mp H^3 \frac{f'''(x)}{1.2.3} + \ldots,$$

$$\Delta = H^2 . \frac{-2}{1.2} \mp \ldots = -H^2 \mp \ldots;$$

ossia Δ è negativo, l'ordinata della curva è minore di quella della tangente, ma il punto che si considera cade nella regione delle y negative; quindi l'arco è convesso al disotto del punto di contatto e concavo al disopra (veggasi la fig. 11).

II. Per la stessa linea

$$y = f(x) = -x^2 + x + 2$$

e pel punto

$$(-1;\ 0)$$

la tangente forma coll'asse x l'angolo T, per cui

$$\tang T = +3;$$

perciò, se nell'asse medesimo, a partire dal punto di contatto, si stacca, nel senso Ox, un piccolo segmento positivo $+H$, è certo, che la parallela alle y condotta per l'estremo di tale segmento taglia la tangente e l'arco nella regione delle y positive.
Ora

$$\Delta = -H^2 \mp \ldots$$

è negativo, perciò l'ordinata della curva è superata da quella della tangente; il punto che si considera cade nella regione delle y positive; l'arco è concavo al disopra dell'asse x e perciò convesso al disotto (veggasi la fig. 11).

III. Sia la linea

$$y = f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{2}{3}:$$

per

$$x = -2$$

si ottiene

$$f(-2) = 0,$$

e la tangente condotta pel punto che ha queste coordinate forma coll'asse x l'angolo acuto T, per cui

$$\tang T = +4.$$

Staccando (fig. 12) sull'asse x un piccolo segmento positivo $+H$ a destra del punto di contatto, ed innalzando per l'estremo del medesimo la normale all'asse x, questa va a segare la tangente nella regione delle y positive; perciò i punti immediatamente a destra di quello di contatto cadono in questa regione, e siccome è

$$\Delta = H^2 \frac{f''(\alpha)}{1.2} \mp \ldots = H^2 . \frac{-5}{1.2} \mp \ldots = -\frac{5}{2} H^2 \mp \ldots$$

ossia negativa, così l'ordinata della curva è minore di quella della tangente, e vi ha concavità a destra e necessariamente convessità a sinistra.

Nel caso in cui pel valore α dell'ascissa del punto di contatto è

$$f''(\alpha) = 0,$$

nella espressione della differenza Δ manca il termine che contiene la seconda potenza di H e si ha:

$$\Delta = \mp H^3 . \frac{f'''(x)}{1.2.3} + \ldots;$$

e siccome, per poter considerare i punti immediatamente a sinistra o immediatamente a destra di quello di contatto, è necessario ritenere H tanto piccolo che il termine

$$\mp H^3 \frac{f'''(x)}{1.2.3}$$

dia il segno a Δ, così in questo caso la differenza è negativa da una parte, positiva dall'altra del punto di contatto; ossia la tangente condotta per questo punto da una parte è collocata fra l'arco e l'asse x, mentre dall'altra parte è l'arco che è intermedio fra la tangente e l'asse; o finalmente, mentre l'arco da una parte di M è concavo verso l'asse, dall'altra parte è convesso, come per esempio rappresenta la fig. 17.

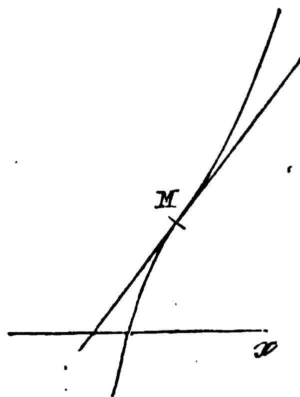


Fig. 17.

Si dice che in questo punto la linea presenta una *inflessione*.

I. Così, ad esempio, per la linea

$$y = f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{2}{3}$$

si trova una inflessione al punto

$$\left(\frac{1}{2};\ -\frac{5}{12}\right),$$

giacchè il polinomio

$$f''(x) = 2x - 1$$

è annullato dal valore $^1/_2$ posto in luogo di x. Lá tangente per questo punto forma colle x l'angolo T, pel quale

$$\operatorname{tang} T = f'\left(\frac{1}{2}\right) = (x^2 - x - 2)_{1/2} = -\frac{9}{4};$$

e quindi un angolo ottuso. Inoltre, siccome la differenza Δ vale

$$\mp H^3 . \frac{f'''(^1/_2)}{1.2.3} + \ldots = \mp \frac{1}{3} H^3 + \ldots$$

ed il punto di inflessione cade nella regione delle y negative, così a sinistra dell'inflessione, differenza negativa, ordinata negativa; convessità; a destra, differenza positiva, ordinata negativa; concavità; (veggasi la fig. 12.)

II. Del pari la linea

$$y = f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x - 3$$

ammette il punto di inflessione

$$\left(-\frac{1}{2}; \; -3\frac{5}{12}\right),$$

giacchè la condizione

$$f''(x) = 2x + 1 = 0$$

è soddisfatta da

$$x = -\frac{1}{2};$$

ed

$$f\left(\frac{-1}{2}\right) = -3\frac{5}{12}.$$

La tangente condotta per questo punto forma colle x l'angolo T, pel quale è

$$\operatorname{tang} T = f'\left(-\frac{1}{2}\right) = (x^2 + x + 1)_{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{4};$$

T è acuto. Siccome poi

$$\Delta = \mp H^3 . \frac{f'''\left(-\frac{1}{2}\right)}{1.2.3} + \ldots = \mp \frac{1}{3} H^3 + \ldots$$

e siccome il punto d'inflessione cade nella regione delle y negative, così a sinistra di M l'arco è convesso verso l'asse, a destra è concavo (veggasi la fig. 13).

Pel luogo rappresentato dalla condizione generale

$$y = f(x) = a x^m + b x^{m-1} + \ldots$$

sono punti di inflessione tutti quelli, le cui ascisse soddisfano alla condizione

$$f''(x) = 0 = m(m-1) a x^{m-2} + (m-1)(m-2) b x^{m-3} + \ldots;$$

ed inversamente per ottenere i punti di inflessione del luogo basta trovare le radici reali dell'equazione:

$$0 = f''(x) = m(m-1) a x^{m-2} + (m-1)(m-2) b x^{m-3} + \ldots$$

e determinare poi i valori di $f(x)$ corrispondenti, a ciascheduna delle radici ottenute: queste possono essere $m-2$; quindi è possibile l'esistenza di $m-2$ punti di inflessione pel luogo

$$y = f(x).$$

È necessario notare che, qualora si discutesse e si costruisse la curva rappresentata dal polinomio

$$f'(x) = m a x^{m-1} + (m-1) b x^{m-2} + \ldots,$$

si troverebbe che la medesima ha le tangenti parallele all'asse x in punti, le cui ascisse sono date da

$$f''(x) = 0;$$

ossia le cui ascisse sono precisamente le medesime di quelle dei punti di inflessione della linea

$$y = f(x).$$

Cosicchè i valori di x ricavati dalla condizione

$$f''(x) = 0$$

corrispondono a valori massimi o minimi di $f'(x)$; e reciprocamente ad ogni massimo o minimo di $f'(x)$ corrisponde un valore che annulla $f''(x)$; — in altre parole, siccome si ha

$$f'(x) = \text{tang } T,$$

così la tangente trigonometrica dell'angolo T, formato coll'asse x dalla tangente condotta per uno dei punti di inflessione, è minore o maggiore della tangente trigonometrica relativa all'angolo formato dalla tangente condotta per un punto situato o immediatamente a sinistra o immediatamente a destra dell'inflessione: ed anche; tang T, dove T è l'angolo formato da tangenti successive al luogo

$$y = f(x),$$

non può crescere prima per decrescere poi, se non quando fra queste tangenti alla curva ve ne sia una condotta per un punto di inflessione.

Ecco l'illustrazione geometrica di tutto questo: Nella fig. 18 si supponga che I sia uno degli $m - 2$ punti di infles-

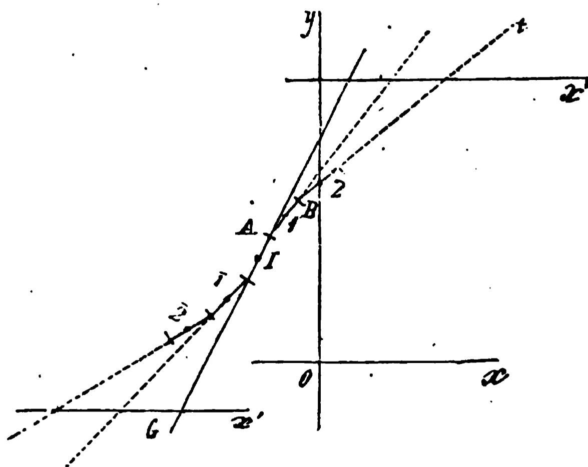


Fig. 18.

sione possibili pel luogo

$$y = f(x);$$

e che 1, 2, 3, ... rappresentino alcuni punti a destra di I, $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$... alcuni punti a sinistra, per ciascheduno dei quali si sia condotta la tangente alla curva.

La legge di continuità alla quale vanno soggette le funzioni $f(x)$, $f'(x)$ permette di scegliere questi punti:

$$\ldots \bar{3}, \bar{2}, \bar{1}, 1, 2, 3, \ldots$$

tanto prossimi quanto si vuole, e quindi di considerare le tangenti pei medesimi così vicine l'una all'altra, da dover ritenere che le loro direzioni possano venir tutte assunte successivamente da una fra di esse, t, la quale si trasporti in modo continuo sul piano, avviluppando la curva. È chiaro che nella successione di quei piccoli segmenti rettilinei che rimangono determinati su una di tali direzioni dalla direzione precedente e dalla successiva (esempio il segmento $A\,B$ determinato sulla tangente 1 dalla tangente I e dalla tangente 2), si ottiene un poligono circoscritto alla curva avente lati tanto brevi quanto si vuole: con che si viene a generare *la curva per tangenti.* Pertanto mentre la retta mobile t assume le varie posizioni occupate dalla tangente sulla figura a sinistra di I, tang T cresce costantemente sino al valore massimo tang $I\,G\,x'$, e mentre t assume le varie posizioni della tangente a destra di I, tang T diminuisce costantemente a partire dal valore tang $I\,G\,x'$. Perciò tang T va continuamente crescendo dalla inflessione che precede I sino ad I, per decrescere da I sino all'inflessione che viene dopo, e quindi l'essere

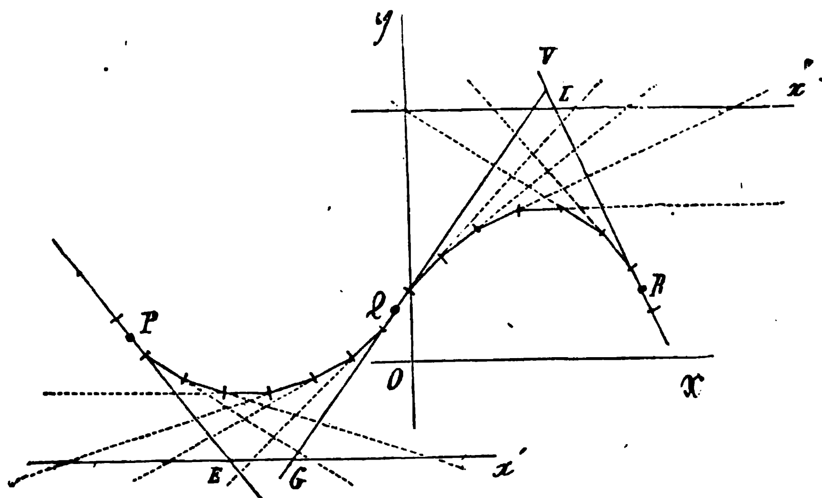


Fig. 19.

l'arco fra due punti di inflessione successivi o tutto concavo o tutto convesso, rispetto ad una parallela all'asse x che non lo seghi, cor-

risponde al crescere costante o decrescere costante di tang T in questo intervallo.

— La fig. 19 contiene tre punti di inflessione P, Q, R: fra P e Q, tang T va continuamente crescendo dallo stato negativo tang PEx' allo stato positivo tang QGx'; fra Q ed R, tang T va continuamente decrescendo dal valore positivo tang QGx' al valore negativo tang VLx''. Tanto in uno quanto nell'altro dei due intervalli considerati, tang T s'annulla; fra P e Q perchè T passa pel valore 180°; fra Q ed R perchè T passa per zero. Di punti siffatti, ***pei quali le tangenti sono parallele all'asse x ve ne può essere*** uno in ogni intervallo limitato da due punti di inflessione; ma non ve ne può essere più d'uno, giacchè affinchè fosse così, sarebbe necessario che tang T, dovendo passare più volte per zero o per 180°, crescesse e decrescesse nello stesso intervallo fra due punti di inflessione successivi.

— Concludendo, fra due punti di inflessione successivi l'arco che è in ogni sua parte o concavo o convesso verso una retta parallela all'asse x che non lo sega; e pel quale la funzione tang T varia sempre nello stesso senso o d'aumento o di diminuzione, può presentare una, ma una sola tangente parallela all'asse x: nel caso in cui tale tangente esiste si dice che l'arco forma una ***ondulazione***.

Tanto la parte di curva che trovasi a sinistra del primo punto di inflessione, quanto quella che trovasi a destra dell'ultimo, non contenendo più punti di inflessione, deve essere costantemente, in ogni suo punto, convessa verso una parallela all'asse x che non la seghi; ossia il luogo deve estendersi illimitatamente tanto a destra quanto a sinistra.

Evidentemente questa considerazione grafica comprende la circostanza analitica che le ordinate hanno tutte lo stesso segno oltre una certa ascissa positiva α e prima di una certa ascissa negativa $-\omega$.

Concludendo, il luogo

$$y = ax^m + bx^{m-1} + \dots$$

va considerato in generale come costituito da un certo numero di archi riuniti fra loro il primo al secondo, il secondo al terzo, ecc., il penultimo all'ultimo dagli $m-2$ punti di inflessione: il primo arco limitato a destra dal primo punto di inflessione è illimitato a sinistra; l'ultimo limitato a sinistra dall'ultimo punto d'inflessione si estende senza limite a destra.

Ciascuno degli archi ora indicati è tutto concavo o tutto convesso rispetto ad una parallela all'asse x che non lo tagli e può formare una ondulazione, cioè può avere un punto, ed uno solo, pel quale la tangente è parallela all'asse x.

Tutto quanto precede è applicato negli esempi del capitolo seguente.

CAPITOLO NONO.

I. Trattisi anzitutto della linea

$$y = f(x) = -x^2 + x + 2.$$

Si sono già segnati (fig. 11) diversi punti della medesima; si sono condotte tre tangenti; la prima pel punto (0; 2) inclinata di 45° sull'asse x; la seconda pel punto $(\bar{1}; 0)$ inclinata sull'asse x dell'angolo T per cui

$$\text{tang } T = 3;$$

la terza pel punto

$$\left(\frac{1}{2}; \frac{9}{4}\right)$$

parallela all'asse x; si è provato che tanto attorno al punto (0; 2), quanto attorno al punto

$$\left(\frac{1}{2}; \frac{9}{4}\right),$$

la curva è concava verso l'asse, e che la medesima è concava del pari a destra del punto $(\bar{1}; 0)$, ma convèssa a sinistra di questo. A quanto precede deve aggiungersi ora, che la linea non può avere alcun punto di inflessione, giacchè nel caso che si tratta, essendo $f''(x)$ uguale al numero -2, non è ammissibile la condizione

$$f''(x) = 0.$$

Perciò la curva in qualunque sua parte è convessa verso la tangente parallela all'asse x, giacchè una modificazione nell'andamento rispetto a tal retta non è possibile, se non esistono punti d'inflessione. Si noti che questa considerazione grafica abbraccia la circostanza particolare verificata su questo esempio, che cioè oltre le ascisse

$$-\frac{5}{2} \text{ e } +\frac{7}{2}$$

tutti i punti del luogo cadevano nella regione delle y negative, e si allontanavano costantemente dall'asse x.

Cosicchè la linea si compone di una ondulazione sola, la quale è limitata nella regione delle y positive dalla tangente

$$y = \frac{9}{4}$$

e si estende indefinitamente nella regione delle y negative: il tratto continuo col quale si possono riunire i diversi punti della fig. 11 andrebbe considerato come una parte di questa curva, la quale deve intendersi descritta così: il punto mobile in cammino nella regione delle y negative da una distanza infinitamente grande viene avvicinandosi all'asse x, lo raggiunge, lo passa (ascissa $\bar{1}$), entra nella regione delle y positive; quivi s'allontana dall'asse x sino ad una distanza massima rappresentata da $\frac{9}{4}$; lasciata questa posizione, si avvicina di nuovo all'asse x, lo passa (ascissa 2), entra nella regione delle y negative e si allontana senza limite dall'asse x. È inutile ripetere la considerazione fatta altre volte e che costituisce un carattere comune a tutti i polinomi che qui si trattano, qualunque sia il loro grado; che cioè a qualunque epoca e a qualsiasi distanza dall'asse x il punto mobile s'avanza costantemente da sinistra verso destra.

II. In modo affatto analogo lo studioso discuta e rappresenti la linea

$$y = f(x) = x^2 + x + 1.$$

Troverà che essa non ha punti di inflessione; che presenta una tangente parallela all'asse x nel punto

$$\left(-\frac{1}{2};\ \frac{3}{4}\right);$$

che è convessa in ogni sua parte verso questa tangente, e che quindi

si compone di una ondulazione sola, la quale si svolge tutta nella regione delle y positive; che sono punti della medesima quelli le cui coordinate vengono indicate nel quadro; che la curva non sega l'asse x, e che finalmente l'equazione

$$x^2 + x + 1 = 0$$

non ha radici reali.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
.....		0	$+1$
-2	$+3$	$\frac{1}{2}$	$+1\frac{3}{4}$
$-\frac{3}{2}$	$+1\frac{3}{4}$	1	$+3$
-1	$+1$	.....	
$-\frac{1}{2}$	$+\frac{3}{4}$		

III. Si sono già individuati (fig. 12) parecchi punti del luogo

$$y = f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{2}{3};$$

si è visto, che esso ha il punto di inflessione

$$\left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{12}\right),$$

che la tangente condotta per questo punto forma colle x l'angolo ottuso T, per cui

$$\operatorname{tang} T = -\frac{9}{4}$$

e che a sinistra dell'inflessione la curva è convessa verso l'asse, mentre è concava a destra. Si è trovato che il luogo nei due punti

$$\left(1; \frac{11}{6}\right), \quad \left(2; \frac{8}{3}\right)$$

ha le tangenti parallele all'asse x, e che tanto attorno al primo quanto attorno al secondo di questi punti la linea è concava verso

l'asse. In base a questo è chiaro che verso la tangente (parallela all'asse x), condotta pel punto d'ascissa -1 è convessa in ogni sua parte quella porzione del luogo che trovasi a sinistra del punto d'inflessione; porzione la quale a destra è limitata da questo punto d'inflessione e si estende, per quanto è stato detto ora, indefinitamente nella regione delle y negative. L'altra porzione del luogo, la quale giace a destra del punto di inflessione, è tutta convessa verso la tangente (parallela all'asse x) condotta pel punto di ascissa 2: cosicchè, mentre essa è limitata a sinistra dal punto di inflessione, è illimitata a destra nella regione delle y positive. Si noti che queste considerazioni comprendono le circostanze particolari verificate già su questo caso, che cioè per ascissa minore di -3 le ordinate erano tutte negative, mentre per ascisse maggiori di $+4$ erano tutte positive.

Pertanto il punto mobile che trovasi in cammino nella regione delle y negative da una distanza infinitamente grande, è andato del continuo avvicinandosi all'asse x, arriva a questo, lo passa (ascissa -2); s'avanza nella regione delle y positive sino ad una distanza massima dall'asse x di $\frac{11}{6}$; da questa posizione ritorna verso l'asse x, lo passa $\left(\text{fra le ascisse zero ed } \frac{1}{2}\right)$, entra nella regione delle y negative, e, passata l'inflessione, arriva sino alla distanza $-\frac{8}{3}$ dall'asse x, dalla quale ritorna verso quest'asse che passa per la terza volta (fra le ascisse 3 e $3\,{}^1/_2$), entra nella regione delle y positive, ed in questa s'allontana indefinitamente dall'asse x.

Inutile ripetere anche qui, che il punto procede costantemente da sinistra verso destra.

Il tratto continuo col quale si possono riunire i punti della fig. 12 rappresenterebbe una parte del luogo.

IV. Quanto alla linea

$$y = f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x - 3$$

si sono già segnati sul piano (fig. 13) diversi punti; e si è trovato anche che essa ha un punto di inflessione, il punto

$$\left(-\frac{1}{2};\quad -3\frac{5}{12}\right);$$

che quivi la tangente forma coll'asse x l'angolo T, per cui

$$\text{tang } T = \frac{3}{4},$$

che a sinistra di questo punto l'arco è convesso verso l'asse, a destra è concavo. Per conoscere se questa linea ammetta tangenti parallele all'asse x, basta scrivere la condizione

$$f'(x) = 0$$

e cercare se e quali numeri la soddisfano. Si ha

$$f'(x) = x^2 + x + 1.$$

Ora

$$x^2 + x + 1 = 0$$

equivale a

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4},$$

che non è soddisfatta da alcun valore reale di x: dunque il luogo non ha tangenti parallele all'asse x, e mancano qui quelle due ondulazioni che presentava la curva dell'esempio III. È facilissimo formarsi l'idea della curva attuale, osservando che in questo caso il punto mobile, nella regione delle y negative s'avvicina costantemente all'asse x, passa la posizione dell'inflessione, raggiunge l'asse x, lo passa $\left(\text{fra le ascisse } 1 \text{ e } \frac{3}{2}\right)$, entra nella regione delle y positive, dove s'allontana indefinitamente dall'asse. È importante notare che le considerazioni geometriche precedenti abbracciano la circostanza particolare verificata altra volta, che cioè per ascisse minori di -3 le ordinate erano tutte negative, mentre per ascisse maggiori di $+2$ le ordinate erano tutte positive; e che di più si è assicurati dalle medesime (cosa rimasta dubbia nello studio precedente di questo esempio) che il luogo sega l'asse x in un punto solo fra le ascisse 1 e $\frac{3}{2}$ e che appunto fra questi limiti cade l'unica radice reale dell'equazione;

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x - 3 = 0.$$

V. Dal polinomio

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + x - 1$$

si deducono i due

$$f'(x) = 6x^2 - 10x + 1,$$

$$f''(x) = 12x - 10.$$

La condizione

$$f''(x) = 12x - 10 = 0$$

è soddisfatta da

$$x = \frac{5}{6};$$

e si ha

$$f\left(\frac{5}{6}\right) = -\frac{67}{27}; \quad f'\left(\frac{5}{6}\right) = -\frac{19}{6};$$

perciò il punto

$$\left[\frac{5}{6} = 0{,}833; \quad -\frac{67}{27} = -2{,}481\right],$$

che cade nella regione delle y negative, è l'unico punto di inflessione del luogo; la tangente condotta per esso forma coll'asse x l'angolo T ottuso, pel quale è

$$\text{tang}\, T = -\frac{19}{6}.$$

Di più, avendosi

$$\Delta = \mp H^3 \cdot \frac{f'''\left(\frac{5}{6}\right)}{1.2.3} + \ldots = \mp 2H^3 + \ldots,$$

ossia essendo negativa la differenza Δ pei punti immediatamente a sinistra della inflessione, e positiva per quelli a destra, ed inoltre trovandosi il punto di contatto nella regione delle y negative, si ha convessità verso l'asse x a sinistra, e concavità verso l'asse medesimo a destra. La condizione

$$f'(x) = 6x^2 - 10x + 1 = 0,$$

equivalente all'altra

$$(6x - 5)^2 = 19, \text{ ecc.},$$

è soddisfatta dai due valori

$$0{,}106; \quad 1{,}559;$$

ai quali corrispondono le ordinate

$$-0{,}947; \quad -4{,}015;$$

perciò pei due punti

$$(0{,}106; \overline{0{,}947}), \quad (1{,}559; \overline{4{,}015})$$

le tangenti sono parallele all'asse x e siccome pel primo di questi punti di contatto f ed f'' hanno lo stesso segno, pel secondo segni contrari,

così attorno al primo punto l'arco è convesso verso l'asse x, attorno al secondo è concavo.

La tabella seguente dà le coordinate di parecchi punti della curva, e nello stesso tempo riassume quasi tutti i risultati precedenti: la terza colonna contiene i valori $f'(x)$ relativi ai tre punti principali, e la colonna *indicazioni* tre parole che mostrano le condizioni di andamento rispetto all'asse x attorno ai due punti di tangente parallela all'asse medesimo e la natura dell'angolo T formato coll'asse x dalla tangente alla inflessione.

x	$f(x)$	$f'(x)$	*Indicazioni*
. . . . . .			
-1	-9		
$-0,5$	-3		
0	-1		
$+0,106$	$-0,947$	0	convessa
$+0,5$	$-1,5$		
$+0,833$	$-2,481$	$-\frac{19}{6}$	ottuso
$+1$	-3		
$+1,559$	$-4,015$	0	concava
$+2$	-3		
$+2,5$	$+1,50$		
$+3$	$+11$		
. . . . . .			

Evidentemente tutta quella parte di curva che trovasi a sinistra del punto di inflessione è costantemente convessa verso la tangente (parallela all'asse x) pel punto d'ascissa $+0,106$; mentre l'altro punto che trovasi a destra dell'inflessione medesima è convessa verso la tangente (parallela all'asse x) pel punto di ascissa $+1,559$.

Cosicchè il luogo di cui si tratta si estende senza limite a sinistra, nella regione delle y negative, a destra in quella delle posi-

tive: il punto mobile, in cammino nella regione delle y negative da una distanza infinitamente grande, viene avvicinandosi all'asse x, arriva sino ad una posizione distante $-0,947$ da questo e poi se ne allontana; passa per l'inflessione, giunge alla distanza dall'asse x rappresentata dal numero $-4,015$; poscia si avvicina di nuovo a quest'asse, lo passa fra le ascisse 2 e 2,5, entra nella regione delle y positive, dove s'allontana senza limite dall'asse x: inutile osservare che a qualsiasi epoca e in qualunque posizione, il punto mobile procede costantemente da sinistra verso destra. La costruzione della linea è facilissima, mediante i dati del quadro, e si lascia allo studioso.

Intanto le considerazioni precedenti hanno posto chiaramente in sodo, che la striscia di piano compresa fra le due tangenti parallele all'asse x, le cui equazioni sono rispettivamente

$$y = -0,947, \quad y = -4,015$$

e sulla quale si trovano il punto di inflessione e i due punti che caratterizzano le ondulazioni di cui si compone la curva, è tutta compresa nella regione delle y negative, e che è quindi il solo ramo estendentesi all'infinito nella regione delle y positive che sega l'asse una volta; e che perciò l'equazione

$$2x^3 - 5x^2 + x - 1 = 0$$

ha una sola radice reale: questa è compresa fra 2 e 2,50.

VI. Dal polinomio

$$y = f(x) = x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 8x - 1$$

si deducono gli altri due

$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + x - 8,$$

$$f''(x) = 12x^2 + 6x + 1.$$

La condizione

$$f''(x) = 12x^2 + 6x + 1 = 0,$$

equivalente all'altra

$$\left(6x + \frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4},$$

non è soddisfatta da alcun valore reale per x, perciò il luogo non ha punti di inflessione.

La equazione

$$f'(x) = 0 = 4x^3 + 3x^2 + x - 8 = 0$$

ha per radice l'unità, e si tramuta quindi in

$$(4x^2 + 7x + 8)(x - 1) = 0:$$

e la condizione

$$4x^2 + 7x + 8 = 0,$$

equivalente all' altra

$$\left(2x + \frac{7}{4}\right)^2 = -\frac{79}{16},$$

non è soddisfatta da alcun numero reale. In conseguenza il luogo ha una sola tangente parallela all' asse x, la tangente condotta pel punto di ascissa 1. Sostituendo l' unità ad x nei polinomi $f(x)$ ed $f''(x)$, si trova

$$f(1) = -6{,}50, \quad f''(1) = +19,$$

quindi l' ordinata del punto di contatto è $-6{,}50$, ed inoltre da una parte e dall' altra di questo punto la curva è concava verso l' asse. Siccome poi il luogo non ha alcun punto di inflessione, così è certo che esso in ogni sua parte è convesso rispetto alla tangente parallela ad x; si compone quindi di una ondulazione sola, caratterizzata dal punto $(1;\ -6{,}50)$; limitata nella regione delle y negative e che si estende indefinitamente tanto a destra, quanto a sinistra nella regione delle y positive.

La tabella alla pagina seguente dà le coordinate di parecchi punti del luogo, ed è in base a quei numeri, ed alle osservazioni fatte precedentemente che si potrà con grande facilità tracciare la curva sul piano. In questo caso pertanto un punto mobile in cammino nella regione delle y positive da una distanza infinitamente grande, viene avvicinandosi all' asse x, lo raggiunge, lo attraversa $\left(\text{fra le ascisse } -\frac{1}{4} \text{ e } 0\right)$, entra nella regione delle y negative, s' allontana dall' asse x sino alla distanza massima rappresentata dall' ordinata $-6{,}50$, ritorna verso l' asse x, lo attraversa di nuovo fra le ascisse

$$+1\frac{2}{4} \quad \text{e} \quad +1\frac{3}{4},$$

entra nella regione delle y positive, allontanandosi costantemente dall' asse x. Il punto mobile poi a qualunque epoca e in qualsiasi

posizione ha sempre proceduto da sinistra verso destra. L'interessante da notare qui è che, siccome la curva descritta sega in due punti l'asse delle x, così l'equazione

$$x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 8x - 1 = 0$$

ha due sole radici reali e due limiti particolari, per ciascheduna di esse sono stati indicati dal processo tenuto.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
. . . . .			
-1	$+7{,}500$	$+\frac{3}{4}$	$-5{,}980$
$-\frac{3}{4}$	$+5{,}175$	$+1$	$-6{,}500$
$-\frac{2}{4}$	$+3{,}062$	$+1\frac{1}{4}$	$-5{,}824$
$-\frac{1}{4}$	$+1{,}019$	$+1\frac{2}{4}$	$-3{,}437$
0	$-1{,}000$	$+1\frac{3}{4}$	$+1{,}269$
$+\frac{1}{4}$	$-2{,}949$	$+2$	$+9{,}000$
$+\frac{2}{4}$	$-4{,}687$	. . . . .	

VII. Abbiasi il polinomio

$$y = f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + x^2 + \frac{23}{6}x - \frac{5}{12}.$$

Da esso si deducono gli altri due:

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{23}{6},$$

$$f''(x) = x^2 - 3x + 2.$$

La condizione

$$f''(x) = 0$$

è soddisfatta dai due numeri 1 e 2. La condizione

$$f'(x) = 0$$

lo è dal numero -1; talchè $f'(x)$ è divisibile per $x+1$, e si trova:

$$f'(x) = (x+1)\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{11}{6}x + \frac{23}{6}\right);$$

la condizione

$$\frac{1}{3}x^2 - \frac{11}{6}x + \frac{23}{6} = 0,$$

equivalente all'altra

$$\left(x - \frac{11}{4}\right)^2 = -\frac{63}{16},$$

non è soddisfatta da alcun numero reale.

Dunque, il luogo rappresentato dalla funzione proposta ha due punti di inflessione, le ascisse dei quali sono rispettivamente 1 e 2 e in conseguenza le ordinate

$$f(1) = +4 \quad \text{ed} \quad f(2) = +8\,{}^{7}/_{12},$$

ed ha un punto solo pel quale la tangente è parallela all'asse x, il punto d'ascissa -1 e di ordinata

$$f(-1) = -2\frac{2}{3}.$$

Attorno a quest'ultimo punto la curva è concava verso l'asse x, giacchè

$$f''(-1) = +6$$

ha segno contrario ad $f(-1)$. Le tangenti pei punti di inflessione formano coll'asse x rispettivamente gli angoli T e T', dei quali tanto l'uno quanto l'altro sono acuti, e per cui

$$\text{tang}\, T = f'(1) = 4\frac{2}{3}; \quad \text{tang}\, T' = f'(2) = 4\frac{1}{2}.$$

Per le condizioni di andamento rispettivamente all'asse x si trova, al punto d'ascisse 1:

$$\Delta = \mp H^3 . \frac{f'''(1)}{1.2.3} + \ldots = \pm \frac{1}{6} H^3 + \ldots;$$

attorno al punto d'ascisse 2:

$$\Delta = \mp H^3 . \frac{f'''(2)}{1.2.3} + \ldots = \mp \frac{1}{6} H^3 + \ldots;$$

e siccome tanto l'un punto quanto l'altro giacciono nella regione delle y positive, così alla sinistra del primo punto l'arco è convesso, a destra concavo; a sinistra del secondo è concavo, a destra convesso.

La tabella seguente riassume quasi tutti i risultati precedenti ed indica le coordinate di alcuni altri punti diversi da quelli trovati sin qui.

x	$f(x)$	$f'(x)$	*Indicazioni*
......	......		
-4	$+53\frac{7}{12}$		
-3	$+17\frac{1}{3}$		
-2	$+1\frac{1}{4}$		
-1	$-2\frac{2}{3}$	0	concava
0	$-\frac{5}{12}$		
1	$+4$	$+4\frac{2}{3}$	acuto
2	$+8\frac{7}{12}$	$+4\frac{1}{2}$	acuto
3	$+13\frac{1}{3}$		
4	$+20\frac{1}{4}$		
......	......		

La colonna $f'(x)$ contiene tre soli numeri che sono quelli relativi alla tangente parallela all'asse x, e alle due tangenti pei punti di inflessione; la colonna indicazioni contiene tre parole, la prima relativa allc condizioni di andamento della linea verso l'asse x attorno al punto di ascissa $\bar{1}$; le altre due relative alla natura degli angoli formati coll'asse x dalle due tangenti pei punti di inflessione. A mezzo dei numeri offerti dalla tabella lo studioso traccerà sul piano la curva, cominciando dai tre punti importanti, secondo l'ordine in cui i medesimi si succedono da sinistra a destra (dall'alto al basso nel qua-

dro); e cioè individuerà il punto di ascissa -1, poscia quello di ascissa 1, in seguito l'altro d'ascissa 2, conducendo nello stesso tempo le tangenti pei punti medesimi; ecc. È chiaro che rispetto all'unica tangente parallela all'asse x è convessa tutta quella parte del luogo, i cui punti hanno ascisse minori di 1, e che perciò l'ondulazione caratterizzata da questa tangente è limitata a destra dal primo punto d'inflessione, ma è illimitata a sinistra, ossia la curva si estende indefinitamente nella regione delle y positive.

Fra i due punti di inflessione non trovasi alcun punto per cui la tangente sia parallela all'asse x; l'ordinata va costantemente aumentando da 4 a $+8\frac{7}{12}$; tang T diminuisce di pochissimo passando dallo stato $+4\frac{2}{3}$ all'altro $+4\frac{1}{2}$; è qui il caso pertanto di un arco limitato a due punti di inflessione successivi, che non forma una ondulazione.

Per ascisse maggiori di 2 si hanno ordinate costantemente positive e crescenti, giacchè non esistono tangenti parallele all'asse x su questa parte del luogo, che è perciò illimitata a destra nella regione delle y positive. È inutile, dopo quanto è stato detto, seguire il cammino che percorrerebbe il punto mobile in questo caso; è importante però notare qui che, siccome la linea sega in due punti l'asse delle x, così l'equazione

$$\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + x^2 + \frac{23}{6}x - \frac{5}{12} = 0$$

ha due sole radici reali, una compresa fra -2 e -1, l'altra fra 0 ed 1.

VIII. Per istudiare la linea la cui equazione è

$$y = f(x) = x^5 - 10x^3 + 6x + 1,$$

si calcolano anzitutto le due prime derivate di $f(x)$, ossia:

$$f'(x) = 5x^4 - 30x^2 + 6,$$
$$f''(x) = 20x^3 - 60x.$$

La condizione

$$f''(x) = 20x^3 - 60x = 0,$$

equivalente all'altra

$$x(x^2 - 3) = 0,$$

è soddisfatta da tre valori di x:

$$0, \quad +\sqrt{3} = +1{,}732, \quad -\sqrt{3} = -1{,}732;$$

ai quali corrispondono rispettivamente i valori di y:

$$f(0)=1;\quad f(1,732)=-24,98;\quad f(-1,732)=26,98:$$

cosicchè il luogo ha tre punti di inflessione:

$$(0;\ 1),\quad (1,732;\ \overline{24},98);\quad (\overline{1},732;\ 26,98).$$

Le tangenti per questi tre punti fanno coll'asse x rispettivamente gli angoli T, T', T''; T è acuto; $T'=T''$ è ottuso, e si ha:

$$\text{tang}\, T=6;\quad \text{tang}\, T'=\text{tang}\, T''=-39.$$

Inoltre pel punto di inflessione d'ascissa 0, che cade nella regione delle y positive, è:

$$\Delta=\mp H^3\frac{f'''(0)}{1.2.3}+\ldots=\pm 10\,.\,H^3+\ldots;$$

pel punto d'inflessione d'ascissa 1,732, che cade nella regione delle y negative, è:

$$\Delta=\mp H^3\frac{f'''(0)}{1.2.3}+\ldots=\mp 20H^3+\ldots;$$

pel punto di inflessione di ascissa $\overline{1},732$; che cade nella regione delle y positive, è:

$$\Delta=\mp H^3.\frac{f'''(\overline{1},732)}{1.2.3}+\ldots=\mp 20H^3+\ldots:$$

cosicchè la linea presenta verso l'asse x, attorno al primo di questi punti, convessità a sinistra, concavità a destra; attorno al secondo, convessità a sinistra, concavità a destra; attorno al terzo, concavità a sinistra, convessità a destra.

La condizione

$$f'(x)=5x^4-30x^2+6=0,$$

equivalente all'altra

$$(5x^2-15)^2=195;\ \text{ecc.},$$

è soddisfatta da quattro valori di x:

$$2,41;\quad -2,41;\quad 0,46;\quad -0,46;$$

ai quali corrispondono rispettivamente i valori di y:

$$-43,22;\quad 45,22;\quad 2,81;\quad -0,81;$$

e perciò il luogo ha quattro tangenti parallele all' asse x, quelle condotte pei punti:

$$(2{,}41;\ \overline{43{,}22}),\quad (\overline{2{,}41};\ 45{,}22),\quad (0{,}46;\ 2{,}81),\quad (\overline{0{,}46};\ \overline{0{,}81});$$

e siccome

$$f''(2{,}41) = +135{,}35,\quad f''(\overline{2{,}41}) = -135{,}35;$$

$$f''(0{,}46) = -25{,}65;\quad f''(\overline{0{,}46}) = +25{,}65:$$

sono di segno contrario rispettivamente a:

$$f(2{,}41) = -43{,}22;\quad f(\overline{2{,}41}) = +45{,}22$$

$$f(0{,}46) = +2{,}81;\quad f(\overline{0{,}46}) = -0{,}81;$$

così attorno a ciascheduno di questi quattro punti la curva è concava verso l'asse x.

Quasi tutti i risultati precedenti, insieme alle coordinate di alcuni altri punti diversi dai considerati, figurano nella presente tabella.

x	$f(x)$	$f'(x)$	*Indicazioni*
....			
-4	-407		
-3	$+10$		
$-2{,}41$	$+45{,}22$	0	concava
$-1{,}73$	$+26{,}98$	-39	angolo ottuso
$-0{,}46$	$-0{,}81$	0	concava
0	$+1$	$+6$	angolo acuto
$+0{,}46$	$+2{,}81$	0	concava
$+1{,}73$	$-24{,}98$	-39	angolo ottuso
$+2{,}41$	$-43{,}22$	0	concava
$+3$	-8		
$+4$	$+409$		
....			

La colonna $f'(x)$ fornisce i valori relativi esclusivamente alle tangenti parallele all'asse x e a quelle condotte pei punti di inflessione, e la colonna successiva (*indicazioni*) contiene le circostanze di andamento attorno ai punti, per cui le tangenti sono parallele all'asse x e la natura degli angoli formati coll'asse x dalle tangenti condotte pei punti di inflessione.

Volendo lo studioso tracciare sul piano il luogo, di cui è questione, dovrà cominciare dal mettere a posto i sette punti principali, procedendo da sinistra verso destra (dall'alto al basso nel quadro); condurre le tangenti rispettive, segnare gli altri quattro punti, le cui coordinate sono indicate nel quadro, ecc. Siccome però qui le ordinate assumono valori assai considerevoli, eziandio in quella parte della curva, la quale dovrebbe essere rappresentata, così tale tracciato potrebbe presentare qualche difficoltà. D'altronde è necessario osservare che, per lo scopo cui si ha in mira, piuttosto che d'un disegno esatto della curva, è qui il caso di un disegno di massima: disegno fatto, cioè, avendo riguardo unicamente al segno (+ o —) delle ordinate e non al loro valore, avendo riguardo alla natura dell'angolo formato dalla tangente (se zero, se acuto, se ottuso) e non al numero che gli serve di misura. Uno schizzo di questo genere, fatto a mano libera, sarà più che sufficiente a fornire una idea chiara dell'andamento della curva; andamento, del resto, che lo studioso deve ora essere in grado di dedurre dalla considerazione dei soli dati della tabella; ed eccolo:

— la parte del luogo, che trovasi a sinistra del primo punto di inflessione (quello d'ascissa $\overline{1},73$), è tutta convessa verso la tangente (parallela all'asse x) condotta pel punto d'ascissa $\overline{2},41$; giacchè sulla medesima non esiste alcun punto di inflessione: perciò questa prima ondulazione è limitata a destra al punto d'ascissa $\overline{1},73$; ma è necessariamente illimitata a sinistra; cosicchè combinando questa circostanza colle condizioni di andamento rispetto all'asse x attorno al punto d'ascissa 2,41, si deve dire che la linea si estende illimitatamente a sinistra nella regione delle y negative dopo aver segato l'asse fra le ascisse — 4 e — 3;

— l'ondulazione seguente, caratterizzata dal punto di ascissa — 0,46, che giace nella regione delle y negative, ha per punti estremi le due inflessioni di ascisse rispettive $\overline{2},41$ e 0, le quali giacciono entrambe nella regione delle y positive; questa ondulazione pertanto sega l'asse x due volte; una volta fra le ascisse $\overline{1},73$ e $\overline{0},46$; la seconda fra le ascisse $\overline{0},46$ e 0;

— viene poscia una terza ondulazione, che ha i suoi estremi, uno

(quello d'ascissa 0) nella regione delle y positive; l'altro (quello d'ascissa 1,73) nella regione delle y negative; e per la quale il punto di tangente parallela all'asse x giace nella regione delle y positive; questa ondulazione sega l'asse una volta sola, fra le ascisse 0,46 ed 1,73;

— l'ultima ondulazione comincia a sinistra all'inflessione di ascissa 1,73; ha la tangente parallela all'asse x nel punto d'ascissa 2,41; e a destra è illimitata; la linea quindi si estende illimitatamente nella regione delle y positive in causa delle speciali condizioni di andamento, dopo aver tagliato per la quinta volta l'asse x fra le ascisse 3 e 4.

Dopo tutto questo è inutile fermarsi a descrivere il cammino che percorrerebbe un punto mobile sul piano. In questo caso è da notarsi però, concludendo, che, siccome la linea

$$y = f(x) = x^5 - 10x^3 + 6x + 1$$

sega in cinque punti l'asse x, così l'equazione

$$x^5 - 10x^3 + 6x + 1 = 0$$

ha cinque radici reali, ciascheduna compresa fra due numeri, che sono stati precedentemente indicati.

Le conclusioni che possono dedursi da quanto è stato esposto sin qui in questo capitolo sono di due specie. Le une si riferiscono ai caratteri geometrici del luogo

$$y = f(x),$$

e a questo riguardo si è detto abbastanza, perchè lo studioso possa riassumerle da sè. Le seconde hanno rapporto diretto col problema generale che si tratta, della separazione cioè delle radici reali dell'equazione:

$$f(x) = 0.$$

Ed anzitutto: dalla costruzione del luogo

$$y = f(x)$$

si può avere la conferma del teorema; che se il grado m di $f(x)$ è dispari, l'equazione $f(x) = 0$ ha necessariamente una radice reale; se m è pari, $f(x) = 0$ può essere sprovvista di radici siffatte; si può avere eziandio la riprova degli altri teoremi del secondo capi-

tolo, nonchè può dedursene *che, affinchè fra due numeri* λ *e* μ *sia compresa una radice di*

$$f(x) = 0$$

è necessario in generale che $f(\lambda)$ *ed* $f(\mu)$ *siano di segno contrario;* o in altre parole che *la reciproca del teorema fondamentale* (capitolo secondo) *è vera, in generale, toltone il caso in cui l'arco sia tangente all'asse* x.

In secondo luogo la costruzione ha condotto alla separazione delle radici di

$$f(x) = 0,$$

ossia alla determinazione di due limiti particolari a ciascheduna delle radici di questa equazione in tutti i casi numerici trattati. E così si è veduto; — che l'equazione

$$-x^2 + x + 2 = 0$$

ha due radici reali, cioè -1 e 2;
— l'equazione

$$x^2 + x + 1 = 0$$

non è verificata da alcun numero della serie reale;
— l'equazione

$$\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{2}{3} = 0$$

ha tre radici reali; una uguale a $\overline{2}$; una seconda compresa fra 0 e 0,50; la terza fra 3 e 3,50;
— l'equazione

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x - 3 = 0$$

ha una sola radice reale compresa fra 1 ed 1,50;
— l'equazione

$$2x^3 - 5x^2 + x - 1 = 0$$

ha una sola radice reale compresa fra 2,0 e 2,5;
— l'equazione

$$x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 8x - 1 = 0$$

ha due radici reali, una fra $\overline{0,25}$ e 0; l'altra fra 1,50 ed 1,75;
— l'equazione

$$\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + x^2 + \frac{23}{6}x - \frac{5}{12} = 0$$

ha due radici reali comprese una fra $\bar{2}$ e $\bar{1}$; l'altra fra 0 ed 1; — l'equazione

$$x^5 - 10x^3 + 6x + 1 = 0$$

ha cinque radici reali, limiti delle quali sono rispettivamente:

$\bar{4}$ e $\bar{3}$; $\overline{1,732}$ e $\overline{0,46}$; $\overline{0,46}$ e 0; 0,46 e 1,732; 3 e 4.

Talchè per questi casi particolari la sola rappresentazione ha condotto alla risoluzione del problema al quale si mira.

Ma però, quantunque la medesima sia sempre facilmente applicabile ai polinomi di terzo grado, pur nondimeno egli è certo che la costruzione grafica, lasciata alle sole sue forze, non condurrebbe facilmente a risultati soddisfacenti per lo scopo che si ha di mira, quando si trattassero equazioni di gradi elevati.

Perciò non nella sola costruzione grafica dovrà cercarsi in generale la soluzione del nostro problema, alla quale essa non può facilmente condurre che in alcuni casi speciali; ma bensì nei principii che emanano da questa costruzione, associati ai principii analitici dei primi quattro capitoli di questo libro; ed è ciò quanto trattano i capitoli che seguono.

CAPITOLO DECIMO.

Si rammenti anzitutto che, dal grado di $f(x)$ e dal numero delle variazioni di segno in questo polinomio e nel polinomio trasformato $F(x)$, si ha mezzo a concludere tosto quante radici reali possibili debbano ammettersi per la proposta

$$f(x) = 0.$$

Da queste considerazioni preliminari si passa in seguito allo studio speciale delle radici positive, sia di $f(x) = 0$, sia di $F(x) = 0$. — Se per l'equazione

$$f(x) = 0,$$

L è il più piccolo numero intiero, che soddisfa alla regola newtoniana (capitoli terzo e quarto), tutte le radici positive della medesima sono comprese nell'intervallo

$$(0 \ldots L).$$

Di più, siccome quella legge, a mezzo della quale dalla funzione $f(x)$ vengono dedotte tutte le derivate

$$f'(x), \quad f''(x), \quad f'''(x) \ldots,$$

vale sempre per formare con una qualunque di queste le derivate successive; e siccome inoltre la condizione newtoniana si riferisce ad uno stato comune per rutti i polinomi

$$f(x), \quad f'(x), \quad f''(x), \quad f'''(x) \ldots;$$

giacchè la medesima esige che essi diano risultati tutti positivi; così è chiaro che L è limite superiore generale, non solamente delle radici di

$$f(x) = 0,$$

ma eziandio di quelle di ciascheduna delle equazioni secondarie

$$f'(x) = 0, \quad f''(x) = 0 \ldots;$$

le radici positive delle quali, per conseguenza, sono esse pure tutte comprese nell'intervallo

$$(0 \ldots L).$$

Al contrario il numero intiero che precede L, ossia $L - 1$ (che si indicherà per semplicità con L_1) non soddisfacendo più alla condizione newtoniana, o in altre parole, rendendo negativo uno o parecchi dei risultati

$$f(L_1), \quad f'(L_1), \quad f''(L_1), \quad f'''(L_1) \ldots,$$

non è più limite *superiore* comune a ciascheduna di queste equazioni, una delle quali almeno deve essere soddisfatta una volta nell'intervallo

$$(L_1 \ldots L).$$

— Può darsi intanto che i risultati $f(L_1)$ ed $f(L)$ abbiano lo stesso segno o abbiano segno opposto.

— Nel primo caso, è possibile l'esistenza di due o più radici (in numero pari) di $f(x) = 0$ nell'intervallo $(L_1 \ldots L)$; ma può avvenire anche che non ne esista alcuna; giacchè, perchè L_1 non soddisfi più alla condizione newtoniana, è sufficiente che nell'intervallo s'annulli una qualsiasi delle derivate

$$f'(x), \quad f''(x), \quad f'''(x) \ldots.$$

— Se poi $f(L_1)$ ed $f(L)$ hanno segno opposto fra L_1 ed L,

$$f(x) = 0$$

è soddisfatto almeno una volta, ma può esserlo anche un numero dispari di volte.

— Talchè, vogliasi nell'un caso, vogliasi nell'altro, è necessario applicare nuove ricerche e nuovi criteri all'intervallo

$$(L_1 \ldots L).$$

Prima di procedere a questo però gioverà generalmente conoscere sin da principio i risultati tutti che s'ottengono da $f(x)$, quando in-

vece di x vi si pongano rispettivamente gli intieri

$$L_2 = L - 2, \quad L_3 = L - 3 \ldots,$$

che precedono L_1; giacchè potrebbe avvenire che in taluni casi speciali tale conoscenza bastasse alla separazione delle radici; o che, più in generale, essa aiutasse le ricerche ulteriori, consigliando ad incominciare quest'ultime piuttosto da un intervallo che da un altro. Per esempio, se per le variazioni offerte da $f(x)$ non fossero possibili in $f(x) = 0$, che n radici positive ed i risultati

$$f(L), \quad f(L_1), \quad f(L_2), \ldots \quad f(0)$$

presentassero nei loro segni $n - 1$ variazioni, sarebbe certo che delle n radici reali supposte esistono solamente $n - 1$, ecc. Veggasi ad esempio l'equazione

$$x^3 - 5x - 3 = 0,$$

studiata alla fine del capitolo quarto.

Ecco ora il concetto delle nuove ricerche da compiersi in seguito su ciascheduno degli intervalli

$$(L_1 \ldots L), \quad (L_2 \ldots L_1), \ldots,$$

e per fissare le idee su

$$(L_1 \ldots L).$$

— Calcolinsi le espressioni

$$f(x); \quad \frac{1}{1} f'(x); \quad \frac{1}{1.2} f''(x); \quad \frac{1}{1.2.3} f'''(x) \ldots,$$

successivamente per

$$x = L_1 \quad \text{ed} \quad x = L$$

a mezzo dell'algoritmo [B] e i risultati si scrivano in ordine inverso, come è qui sotto indicato:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{\underline{|m}} f^{(m)}(L_1), \quad \frac{1}{\underline{|m-1}} f^{(m-1)}(L_1), \quad \frac{1}{\underline{|m-2}} f^{(m-2)}(L_1) \ldots, \\ \qquad \ldots \frac{1}{1.2} f''(L_1), \quad \frac{1}{1} f'(L_1), \quad f(L_1); \\ \frac{1}{\underline{|m}} f^{(m)}(L), \quad \frac{1}{\underline{|m-1}} f^{(m-1)}(L), \quad \frac{1}{\underline{|m-2}} f^{(m-2)}(L) \ldots, \\ \qquad \ldots \frac{1}{1.2} f''(L), \quad \frac{1}{1} f'(L), \quad f(L); \end{array}\right.$$

— nella prima di queste serie alcuni, ed uno almeno dei termini, è negativo; nella seconda i termini tutti sono positivi.

Si supponga di costruire ordinatamente gli archi delle linee

$$f^{(m-1)}(x),$$
$$f^{(m-2)}(x),$$
$$f^{(m-3)}(x),$$
$$\vdots$$
$$f(x),$$

terminati ai punti di ascisse L_1 ed L. Anzitutto la linea

$$f^{(m-1)}(x)$$

è una retta; cosicchè i soli segni delle ordinate estreme, cioè di

$$f^{(m-1)}(L_1) \quad \text{ed} \quad f^{(m-1)}(L),$$

bastano a stabilire se questa retta seghi o no l'asse nell'intervallo

$$(L_1 \ldots L):$$

nel che si ha un criterio certo per dire se la linea susseguente

$$f^{(m-2)}(x)$$

presenti o non presenti una tangente parallela all'asse x nell'intervallo, ossia formi o non formi una ondulazione. Se tale ondulazione esiste, può accadere che essa seghi o non seghi l'asse; o, in altre parole, che l'inrervallo $(L_1 \ldots L)$ comprenda o no due radici dell'equazione

$$f^{(m-2)}(x) = 0;$$

ed è questo quanto deve essere accertato prima di continuare. A ciò servirà un procedimento che si discuterà in breve e che, o condurrà alla conclusione che l'ondulazione considerata non taglia l'asse, o spezzerà l'intervallo $(L_1 \ldots L)$ in due intervalli distinti, ciascheduno dei quali contiene un punto di sezione; a questo punto si potrà, o sull'intervallo maggiore, se l'ondulazione non sega l'asse, o su ciascheduno dei minori se ha luogo il contrario, continuare lo studio sugli archi successivi sino al primo $f(x)$, e quindi si concluderà se il polinomio $f(x)$ ammette o no numeri che lo annullano nell'intervallo considerato.

Se poi la retta

$$f^{(m-1)}(x)$$

non sega l'asse, si piglierà per punto di partenza il primo fra gli archi precedenti che taglia l'asse medesimo, ecc.

Tutto il lavoro precedentemente indicato, ripetuto agli intervalli

$$(L_2 \ldots L_1), \quad (L_3 \ldots L_2), \ldots$$

condurrà alla separazione delle radici, ossia alla determinazione di altrettante limitazioni particolari per ciascheduna di esse.

Ciò per quanto ha riguardo allo spirito del metodo: — il modo di applicarlo, i criteri geometrici speciali necessari, le semplificazioni che si possono usare esigono lo studio particolareggiato di buon numero d'esempi; ed è quanto viene fatto qui sotto.

I. Anzitutto si studi l'equazione

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0,$$

e si provi direttamente quanto si verificò nel capitolo secondo; che cioè essa ha una sola radice reale. — La medesima pel suo grado potrebbe avere tre radici reali; l'unica variazione presentata da $f(x)$ accenna all'esistenza necessaria di una sola radice positiva; e i due cambiamenti di segno, che si incontrano nel polinomio trasformato

$$F(x) = x^3 - 2x + 5,$$

permettono di supporre due radici negative.

Riferendosi all'equazione data

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0,$$

si vede immediatamente, che per l'unica radice positiva è limite superiore il numero

$$5 + 1 = 6;$$

da questo si discende sino a 3, il più piccolo degli intieri che soddisfino alla regola newtoniana. Per $x = 3$ si ottiene

$$f(3) = +16,$$

per $x = 2$

$$f(2) = -1;$$

ed è evidente che, non potendosi in questo caso supporre più radici positive, si deve senz'altro concludere, che l'unica radice posi-

tiva è compresa fra 2 e 3. Qui pertanto non è più necessario l'esame delle due serie che si ottengono per $x = 2$ ed $x = 3$; però, siccome esse presentano un carattere speciale, che si incontrerà sovente in seguito, così è utile studiarle egualmente. Esse trovansi trascritte nel quadro:

x	2	3
$\frac{1}{\underline{\|3}} f'''$	$+1$	$+1$
$\frac{1}{\underline{\|2}} f''$	$+6$	$+9$
$\frac{1}{1} f'$	$+10$	$+25$
f	-1	$+16$

Tutti i numeri che le compongono sono positivi, ad eccezione di uno solo, $f(2)$; la retta $f''(x)$ non sega l'asse nello intervallo, giacchè le ordinate estreme *sono dello stesso segno;* quindi fra le ascisse 2 e 3 non esiste per la linea $f'(x)$ alcun punto di tangente parallela all'asse x: — la linea $f'(x)$ fra gli stessi limiti 2 e 3 non sega l'asse, giacchè non forma ondulazioni nell'intervallo, e le sue ordinate estreme *hanno segni uguali;* non esiste in conseguenza alcun punto di tangente parallela all'asse x sulla linea $f(x)$, la quale però sega l'asse una volta, giacchè i segni delle ordinate estreme dell'arco sono opposti. Concludendo, fra 2 e 3 esiste una radice di

$$f(x) = 0,$$

e non ne esiste alcuna di

$$f'(x) = 0,$$

o di

$$f''(x) = 0.$$

Ogni volta che in due serie calcolate si riscontrerà il carattere esaminato ora, si potrà ammettere la conclusione precedente senza ripetere i ragionamenti fatti; i quali del resto sono applicabili ad un caso più generale di quello trattato; al caso, cioè, in cui, non già i risultati tutti abbiano lo stesso segno, ad eccezione di un solo, ma a

quello in cui abbiano segni uguali due a due i risultati corrispondenti, al caso, per esempio, offerto dalla serie del seguente quadro,

x	L_1	L
$\frac{1}{\lfloor m} f^{(m)}$	+	+
$\frac{1}{\lfloor m-1} f^{(m-1)}$	—	—
$\frac{1}{\lfloor m-2} f^{(m-2)}$	+	+
$\vdots$	»	»
$\frac{1}{1} f'$	+	+
f	+	+

ottenute supponendo $x = L$ ed $x = L_1$ nel polinomio $f(x)$ di grado m.

Per lo studio delle radici negative dell'equazione $f(x) = 0$, si ricorre alla trasformata

$$f(-x) = 0 = F(x) = x^3 - 2x + 5 = 0,$$

e si cercano le radici positive di questa. Il più piccolo numero intiero, limite superiore secondo la regola newtoniana, è l'unità; per $x = 1$ ed $x = 0$ si hanno i risultati $F(1) = +4$, $F(0) = +5$; e le due radici supposte debbono pertanto cercarsi fra 0 e 1. Sono riassunti nel quadro

x	0	1
$\frac{1}{\lfloor 3} . F'''$	+1	+1
$\frac{1}{\lfloor 2} . F''$	0	+3
$\frac{1}{1} F'$	−2	+1
F	+5	+4

i termini delle due serie. — La retta $F''(x)$ sega l'asse all'estrèmo di ascissa 0, non nello intervallo; talchè l'ondulazione della linea successiva non cade entro l'intervallo ed F' passa dallo stato negativo -2 al positivo $+1$, segando l'asse una volta sola; perciò l'arco della $F(x)$ presenta un punto di tangente parallela all'asse x; inoltre, siccome è

$$F(0) = +5 \quad \text{ed} \quad F(1) = +4,$$

così gli estremi di questo arco cadono entrambi nella regione delle y positive; ed è incerto anzitutto se l'ondulazione, limitata a questi estremi e contenente il punto suddetto, abbia tale disposizione da dover ammettere che essa può segare l'asse delle x, o da potere a dirittura concludere che ciò è impossibile. Per decidere questo si considerino le direzioni delle tangenti guidate pei punti di ascissa 0, e d'ascissa 1, ossia pei punti estremi dell'arco nell'intervallo. Queste direzioni sono date in massima dai segni che ha F' per le ascisse

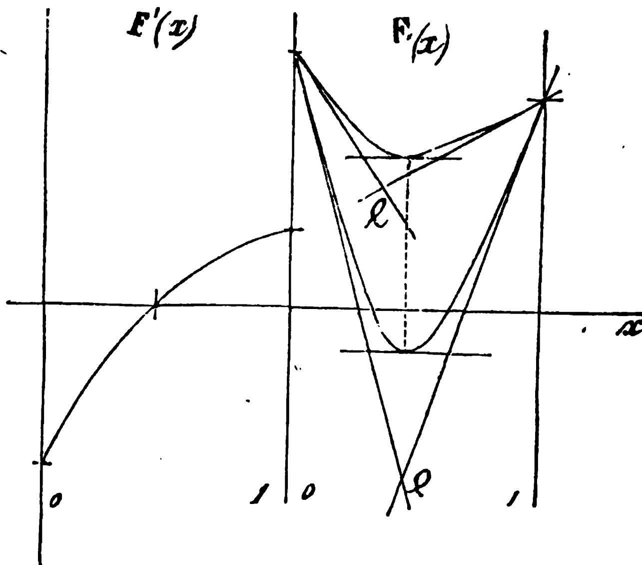


Fig. 20.

di questi punti. Ora per $x = 0$, $F'(0)$ è negativo, dunque la tangente a sinistra forma coll'asse un angolo ottuso; per $x = 1$,

$$F'(1) = +1$$

è positivo, dunque la tangente a destra forma coll'asse un angolo acuto: questi risultati, uniti alla circostanza che l'arco $F(x)$ pre-

senta nell'intervallo un solo punto di tangente parallela all'asse x, permettono di concludere che l'arco istesso volge la convessità verso il basso. Cosicchè in questo caso la disposizione è tale da dover ammettere che la curva può essere segata dall'asse (fig. 20). È utile notare qui che sarebbe precisamente avvenuto il contrario, cioè sarebbe stata accertata l'impossibilità che l'arco segasse l'asse, quando,

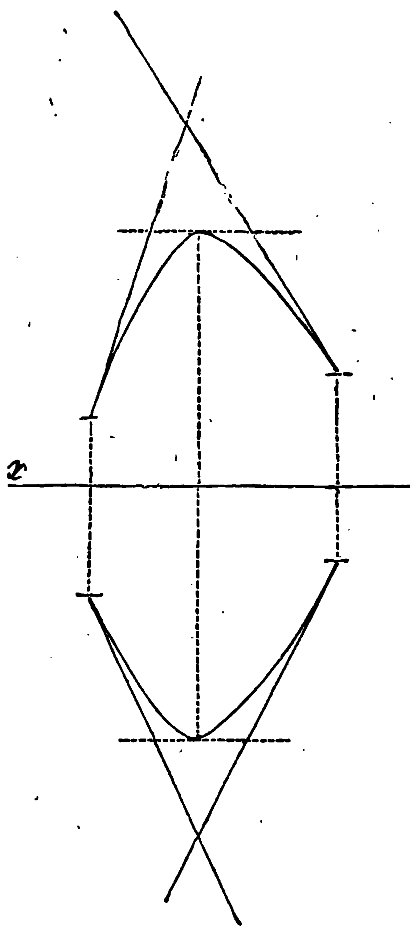


Fig. 21.

le ordinate dei punti estremi essendo entrambe positive, la curva fosse stata concava verso il basso, ovvero quando, le ordinate dei punti estremi essendo entrambe negative, l'arco avesse rivolta la convessità al basso. Questi due casi sono rappresentati nella fig. 21.

Intanto, provato che nell'esempio attuale l'ondulazione può

segare l'asse, resta a decidere se essa lo sega realmente o no. Serve per questo il calcolo dell'ordinata del punto Q (fig. 20) comune a quelle due tangenti, delle quali precedentemente si sono studiate le direzioni; se si troverà che Q cade fra la curva e l'asse, o nel caso particolare attuale che l'ordinata di Q è positiva, vorrà dire, che l'ondulazione non arriva sino all'asse. Ora i risultati:

$$F(0) = +5,$$
$$F(1) = +4,$$
$$F'(0) = -2,$$
$$F'(1) = +1,$$

somministrano il mezzo di scrivere immediatamente le equazioni delle due tangenti; e cioè:

per la tangente a sinistra, $y - 5 = -2(x - 0)$,
» » a destra, $y - 4 = 1(x - 1)$;

donde per l'ordinata Y del punto comune a queste due rette:

$$Y = +\frac{11}{3};$$

cosicchè il punto suddetto cade effettivamente fra la curva e l'asse, che non possono perciò segarsi l'un l'altro. Le due radici reali supposte in

$$F(x) = 0$$

non esistono; e quindi

$$f(x) = 0$$

non ha radici negative.

Il metodo tenuto ora, e che si terrà costantemente in seguito, per decidere se una ondulazione tagli l'asse o no, può chiamarsi *metodo delle due tangenti* e si compone di due parti; nella prima delle quali, considerando le direzioni di massima delle due tangenti, si è condotti a decidere se l'arco è disposto in modo da poter tagliare l'asse; nella seconda, a mezzo delle equazioni delle due tangenti, si conclude se l'intersezione dell'arco coll'asse, giudicata possibile nella prima parte, avvenga difatti o no.

È utile considerare sin da ora i risultati ai quali può condurre questa seconda parte del metodo.

Ogni volta che il calcolo della ordinata del punto Q, comune alle due tangenti, indicherà, che tal punto cade fra l'arco e l'asse,

si dovrà concludere che l'uno di questi non è segato dall'altro; precisamente come ha luogo nell'esempio trattato. Ma quando il calcolo suddetto condurrà al risultato opposto, che cioè l'asse trovasi intermedio fra il punto Q e gli estremi dell'arco considerato, allora nulla potrà concludersi di certo, essendo ugualmente possibile che la curva seghi l'asse o no. In casi siffatti sarà necessario dividere l'intervallo in intervalli minori e studiare separatamente ciascheduno di questi, come si vedrà negl'esempi successivi.

Intanto, riassumendo i risultati ottenuti nello studio dell'equazione

$$x^3 - 2x - 5 = 0,$$

si deve dire, che essa ha una sola radice reale compresa fra 2 e 3; come si verificò nel capitolo secondo.

II. L'equazione

$$f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 3 = 0$$

può, pel suo grado, essere soddisfatta da tre numeri reali, e siccome il polinomio trasformato

$$F(x) = x^3 + x^2 + 2x + 3$$

non presenta alcuna variazione, ed $f(x)$ ne presenta tre, così la proposta manca di radici negative, e i numeri reali che la soddisfano, se esistono, sono tutti e tre positivi. In questo caso pertanto basta lo studio dell'equazione:

$$f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 3 = 0.$$

È limite superiore generale:

$$3 + 1 = 4;$$

da questo si discende all'altro

$$\frac{3}{1+2} + 1 = 2,$$

che è il più piccolo degli intieri che soddisfano alla regola newtoniana: si trova successivamente

$$f(2) = +5;$$

$$f(1) = -1:$$

$$f(0) = -3:$$

ora da questi risultati non è dato di concludere nulla di certo, se non che fra 1 e 2 trovasi almeno una radice reale.

Se nell'intervallo

$$(1 \ldots 2)$$

questa radice necessaria esiste da sola, l'intervallo precedente

$$(0 \ldots 1)$$

può comprenderne due o nessuna; ma può avvenire eziandio che fra 1 e 2 vi siano tutte e tre le radici reali supposte e che non ne esista alcuna fra 0 ed 1.

Pertanto è qui di assoluta necessità la ricerca delle serie per

$$x = 2, \quad x = 1, \quad x = 0.$$

I risultati sono riassunti nella seguente tabella:

x	0	1	2
$\frac{1}{\underline{\|3}} f'''$	$+1$	$+1$	$+1$
$\frac{1}{\underline{\|2}} f''$	-1	$+2$	$+5$
$\frac{1}{\underline{\|1}} f'$	$+2$	$+3$	$+10$
f	-3	-1	$+5$

Le serie per $x = 1$ ed $x = 2$ presentano un carattere già noto, ed è inutile ripetere le considerazioni geometriche, dalle quali si è condotti a concludere, che fra 1 e 2 vi è una sola radice di

$$f(x) = 0.$$

Passando all'intervallo

$$(0 \ldots 1),$$

si rimane incerti, se esso comprenda due radici di

$$f(x) = 0,$$

o non ne comprenda alcuna. Intanto la retta $f''(x)$ sega l'asse nell'intervallo, quindi $f'(x)$ ha una tangente parallela all'asse x, e forma

una ondulazione; se questa arriva a segar l'asse, $f'(x)$ s'annulla due volte, cosicchè $f(x)$ presenta due tangenti parallele all'asse x, e quindi due ondulazioni, delle quali una può tagliare l'asse e dare così le due radici supposte fra 0 ed 1 (veggasi la fig. 22): le due ondulazioni di $f(x)$ non potrebbero entrambe segar l'asse, giacchè allora la proposta avrebbe quattro radici fra 0 ed 1; il che non è. Perciò è necessario anzitutto stabilire se l'ondulazione dell'arco $f'(x)$ seghi l'asse o no.

Si applica per questo il metodo delle due tangenti, osservando:

— che le ordinate dei punti di tangenza sono entrambe positive;

— che la tangente a sinistra forma coll'asse x un angolo ottuso, quella a destra un angolo acuto;

— che l'arco è convesso verso il basso;

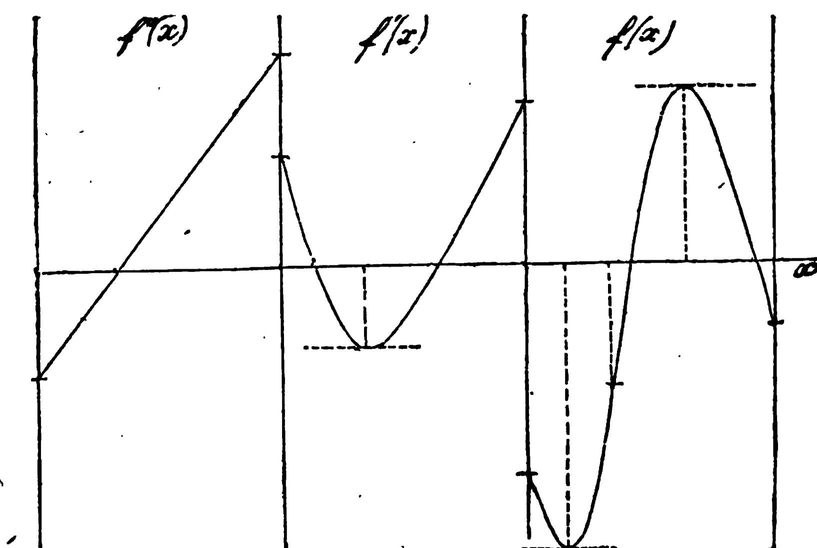


Fig. 22.

— e che quindi la sola direzione delle tangenti non basta a risolvere la difficoltà. Si ricorre quindi alle loro equazioni. Le ordinate dei punti di tangenza sono rispettivamente:

$$2 \cdot 1 = 2; \quad 3 \cdot 1 = 3;$$

le prime costanti di questa retta;

$$\bar{1} \cdot 1 \cdot 2 = -2; \quad 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4;$$

numeri ottenuti dai risultati del quadro moltiplicati per la fattoriale che divide la funzione alla quale detti numeri si riferiscono. Da ciò

deduconsi le equazioni:

per la tangente a sinistra: $y - 2 = -2(x - 0)$,

per la tangente a destra: $y - 3 = 4(x - 1)$;

da cui

Ordinata del punto comune $= Y = +1$;

cosicchè le tangenti si segano in un punto compreso fra la curva e l'asse; l'ondulazione di $f'(x)$ non arriva sino a quest'ultimo; $f'(x)$ non s'annulla ed $f(x)$ non presenta tangenti parallele ad x; passa dallo stato -3 al -1, offrendo solamente una inflessione, giacchè $f''(x)$ s'annulla nell'intervallo.

Pertanto, raccogliendo le diverse conclusioni speciali, la equazione:

$$x^3 - x^2 + 2x - 3 = 0$$

ha una sola radice reale compresa fra 1 e 2.

Noti lo studioso che in questo esempio è occorso di dover ricorrere alle equazioni di tangenti condotte ad una linea secondaria e precisamente alla linea $f'(x)$. Ciò accadrà assai sovente in seguito, e sarà necessario, ogni volta che si presenti un caso di questo genere, osservare di non servirsi, nel comporre le due equazioni, dei risultati numerici quali vengono dati dal quadro, ma bensì dei prodotti di questi per le fattoriali, che dividono le funzioni a cui detti risultati si riferiscono.

III. Anche per l'equazione

$$f(x) = 8x^3 - 14x + 7 = 0$$

la sola considerazione del grado indica l'esistenza possibile di tre radici reali: siccome poi

$$F(x) = 8x^3 - 14x - 7$$

presenta un solo cambiamento di segno, così una, ed una sola, radice negativa esiste necessariamente; e le due variazioni di $f(x)$ non contraddicono l'esistenza delle due positive.

Anzitutto, per l'unica radice positiva dell'equazione trasformata

$$F(x) = 8x^3 - 14x - 7 = 0$$

è limite superiore 2, il più piccolo degli intieri che soddisfino alla regola newtoniana: $x = 2$ da $F(2) = +29$, $x = 1$ da $F(1) = -13$, e si può addirittura concludere, che la radice cercata esiste fra 1 e 2. Lo sviluppo degli algoritmi e l'esame delle serie risultanti sono su-

perflui: però è utile osservare che, come si può rilevare dal quadro, queste ultime presentano anche qui il carattere già avvertito; dell' avere cioè tutti i termini, ad eccezione di un solo, il segno $+$.

x	1	2
$\frac{1}{\lfloor 3} F'''$	$+8$	$+8$
$\frac{1}{\lfloor 2} F''$	$+24$	$+48$
$\frac{1}{1} F'$	$+10$	$+82$
F	-13	$+29$

L' equazione

$$f(x) = 0$$

pertanto ha l' unica sua radice negativa compresa fra -2 e -1 e può interessare il conoscere i segni dei polinomi

$$f(x), \quad f'(x), \quad f''(x) \ldots$$

per $x =$ successivamente -2 e -1.

Il quadro relativo si deduce immediatamente dal precedente, in base alla considerazione fatta nel secondo capitolo, cioè, che se $-\omega$ è un numero negativo, si ha

$$f(-\omega) = -F(\omega), \quad \text{o} \quad f(-\omega) = +F(\omega),$$

secondo che il grado comune dei due polinomi $f(x)$ ed $F(x)$ è dispari o pari.

x	-1	-2
$\frac{1}{\lfloor 3} f'''$	$+8$	$+8$
$\frac{1}{\lfloor 2} f''$	-24	-48
$\frac{1}{1} f'$	$+10$	$+82$
f	$+13$	-29

L'esame dei segni nei diversi termini delle serie dimostra che fra i numeri — 1 e — 2, che comprendono una sola radice di

$$f'(x) = 0,$$

le serie medesime presentano il carattere presentito sulla fine del primo esempio trattato, carattere che è più generale di quello notato sin qui, giacchè non già tutti i segni ad eccezione di un solo sono positivi, ma unicamente sono gli stessi (positivi o negativi) i segni di due termini corrispondenti.

Quanto alle radici positive, è limite superiore immediato

$$\frac{14}{8} + 1 = 3 \text{ circa};$$

e si discende sino ad 1 colla regola newtoniana: si ottiene:

$$f(1) = +1, \quad f(0) = +7;$$

cosicchè qui cade il dubbio se fra 0 ed 1 vi siano o manchino le due radici positive possibili; ed è necessario studiare le serie i cui termini sono riassunti qui sotto.

Intanto $f''(x)$ sega l'asse all'ascissa 0, ma di ciò non è a tenersi conto nelle considerazioni successive.

x	0	$^1/_2$	$^3/_4$	1
$\frac{1}{\lfloor 3} f'''$	$+8$	»	»	$+8$
$\frac{1}{\lfloor 2} f''$	0	»	»	$+24$
$\frac{1}{1} f'$	-14	-8	$-^1/_2$	$+10$
f	$+7$	$+1$	$-^1/_8$	$+1$

La curva $f(x)$ taglia una volta l'asse passando dall'ordinata — 14 alla + 10, talchè la linea $f(x)$ forma una ondulazione limitata nell'intervallo alle ordinate $+7$ e $+1$. Per decidere se la medesima ha tal direzione da poter tagliare l'asse, e se, così essendo, lo seghi poi di fatto, si ricorre al metodo delle due tangenti.

La tangente a sinistra forma colle x un angolo ottuso [come è indicato dal segno di $f'(0)$], quella a destra un angolo acuto [come è indicato dal segno di $f'(1)$]; l'arco volge la convessità al basso, e siccome i suoi punti estremi nell'intervallo cadono nella regione delle y positive, così la questione non è risolta e conviene ricorrere alle equazioni delle due tangenti, che sono rispettivamente:

quella della tangente a sinistra $y - 7 = -14(x - 0)$,

quella della tangente a destra $y - 1 = 10(x - 1)$;

donde

$$Y = \text{ordinata del punto comune} = -\frac{7}{3}:$$

perciò il punto d'incontro delle due tangenti cade nella regione delle y negative, mentre gli estremi dell'arco considerato cadono in quella delle y positive; l'asse giace fra tale punto d'incontro e gli estremi dell' arco — e rimane tuttora dubbio se la curva seghi l'asse o no. — È qui pertanto il caso di dividere l'intervallo $(0 \ldots 1)$ in intervalli minori e studiare separatamente questi altri. Si valuta la serie per

$$x = \frac{1}{2};$$

ma non è necessario in questo calcolo spingersi più in là del risultato f', giacchè è certo che i risultati f'' ed f''' sono positivi; non essendo infatti possibile che la retta $f''(x)$ seghi l'asse nell'intervallo minore

$$(0 \ldots {}^1/_2),$$

quando è provato che non lo sega nel maggiore

$$(0 \ldots 1).$$

Come risulta dal quadro precedente, che contiene i risultati importanti delle serie per

$$x = \frac{1}{2}:$$

nell'intervallo

$$(0 \ldots {}^1/_2),$$

$f'(x)$ non sega l'asse, si svolge nella regione delle y negative passando dallo stato -14 al -8; e perciò $f(x)$ non presenta nè tangenti parallele all'asse x, nè punti di inflessione, nè punti di sezione

coll'asse; dunque fra o ed $^1/_2$ nessuna radice. Nell'intervallo

$$(^1/_2 \ldots 1)$$

hanno lungo le stesse circostanze di segno che nell'intervallo

$$(0 \ldots 1),$$

e non vi è altro a fare che applicare l'ultima parte del metodo delle due tangenti:

equazione della tangente a sinistra: $y - 1 = -8(x - {}^1/_2)$;
equazione della tangente a destra: $y - 1 = 10(x - 1)$;

donde per ordinata del punto comune

$$Y = -\frac{11}{9};$$

talchè si rimane ancora nella incertezza se la curva seghi l'asse o no, ed è necessario dividere l'intervallo $(^1/_2 \ldots 1)$ in intervalli minori. Si fa $x = {}^3/_4$; si ottiene:

$$f(^3/_4) = -{}^1/_8, \quad f'(^3/_4) = -{}^1/_2;$$

ed è inutile continuare l'algoritmo, giacchè si è certi che i risultati successivi sono positivi. A questo punto può dirsi senz'altro che le due radici supposte esistono difatto e sono comprese una fra $^1/_2$ e $^3/_4$ e l'altra fra $^3/_4$ ed 1.

Riunendo pertanto le diverse conclusioni particolari, deve dirsi che l'equazione

$$8x^3 - 14x + 7 = 0$$

ha tutte e tre le radici reali; una compresa fra -2 e -1; una seconda fra $^1/_2$ e $^3/_4$; la terza fra $^3/_4$ ed 1.

Importa qui generalizzare l'osservazione, fatta precedentemente nel dividere l'intervallo

$$(0 \ldots 1),$$

e che permise allora di arrestare il calcolo per $x = {}^1/_2$ al risultato f'. — Se trattando il polinomio $f(x)$ di grado m, si trova che pei due limiti L_1 ed L le serie hanno i termini corrispondenti dello stesso segno sino ai due

$$\frac{1}{\underline{/p}} f^{(p)}$$

inclusivamente, come avviene, per esempio, nelle successioni offerte

dal quadro

x	L_1	I	L
$\frac{1}{\underline{\vert m}} f^{(m)}$	+	»	+
$\frac{1}{\underline{\vert m-1}} f^{(m-1)}$	—	»	—
$\frac{1}{\underline{\vert m-2}} f^{(m-2)}$	+	»	+
. . .	. . .	. . .	. . .
$\frac{1}{\underline{\vert p}} f^{(p)}$	—	»	—
$\frac{1}{\underline{\vert p-1}} f^{(p-1)}$	+	»	—
. . .	. . .	»	. . .

od in altre consimili, che è facile immaginare; si può concludere che gli archi di tutte le linee, cominciando da $f^{(m-1)}(x)$ sino ad $f^{(p)}(x)$ inclusivamente nulla presentano di singolare nello intervallo

$$(L_1 \ldots . L).$$

Pertanto nel computo della serie per un numero I intermedio fra L_1 ed L torna inutile spingersi al di là dei due risultati

$$\frac{1}{\underline{\vert p-1}} f^{(p-1)};$$

giacchè è certo che tutte le linee che precedono $f^{(p-1)}(x)$ nella tabella non potranno presentare negli intervalli minori

$$(L_1 \ldots I), \quad (I \ldots L)$$

quelle singolarità che le medesime non presentavano nell'intervallo maggiore

$$(L_1 \ldots L);$$

e perciò, come è indubitato che un termine qualunque di questa

nuova serie sino ad

$$\frac{1}{|p} f^{(p)}$$

inclusivamente, presenterà il segno comune ai termini corrispondenti delle altre due già computate; così è altrettanto inutile conoscere il valore assoluto del medesimo, giacchè, non presentando la curva alla quale esso si riferisce alcuna accidentalità nell'intervallo, questa cognizione non ha importanza per lo studio che si ha in mira.

IV. L'equazione

$$f(x) = x^4 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$$

pel suo grado potrebbe avere quattro radici reali; ma siccome $f(x)$ presenta due sole variazioni ed $F(x)$ non ne ha alcuna, così di queste quattro radici solamente due positive restano possibili. Per decidere se le medesime esistano difatto o no, si osservi che nell'equazione

$$f(x) = x^4 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$$

è limite superiore delle radici 3; da questo si discende a

$$\frac{2}{1+3} + 1 = 2 \text{ circa},$$

e finalmente ad 1 che soddisfa ancora alla regola newtoniana: per $x = 1$ si ha $f(1) = 3$, per $x = 0$ si ha $f(0) = 1$; cosicchè è precisamente nell'intervallo $(0 \ldots 1)$ che possono esistere le due radici supposte. Le serie relative sono riassunte nel quadro:

x	0	$^1/_2$	1
$\frac{1}{\|4} f^{iv}$	$+1$	»	$+1$
$\frac{1}{\|3} f'''$	0	»	$+4$
$\frac{1}{\|2} f''$	$+3$	$+\frac{11}{3}$	$+9$
$\frac{1}{1} f'$	-2	$+\frac{4}{27}$	$+8$
f	$+1$	$+\frac{55}{81}$	$+3$

Nulla di rimarchevole sino alla linea $f''(x)$, inclusivamente; la linea $f'(x)$ presenta solamente un punto di sezione nell'intervallo; cosicchè $f(x)$ forma una ondulazione, la quale è limitata alle ordinate positive $+1$ e $+3$. La sola considerazione delle direzioni delle due tangenti non basta a decidere se quest'ondulazione seghi l'asse o no; ed è quindi necessario ricorrere alla seconda parte del metodo e scrivere le equazioni delle medesime. Si ha:

$$\text{per la tangente a sinistra,} \quad y - 1 = -2(x - 0);$$

$$\text{per la tangente a destra,} \quad y - 3 = 8(x - 1);$$

donde

$$Y = -\frac{1}{5};$$

e resta ancora l'incertezza di prima: si restringa l'intervallo, calcolando la serie, per esempio per $x = \frac{1}{3}$, spingendo il calcolo sino ad $\frac{1}{\underline{/2}} f''$ inclusivamente, giacchè, per l'osservazione fatta alla fine dell'esempio precedente, sarebbe inutile proseguire. Nessuna radice è possibile fra $1/3$ ed 1; e due lo sono fra 0 e $1/3$. È necessario anche qui ricorrere alle equazioni delle due tangenti:

$$\text{tangente a sinistra,} \quad y - 1 = -2(x - 0);$$

$$\text{tangente a destra,} \quad y - \frac{55}{81} = \frac{4}{27}\left(x - \frac{1}{3}\right);$$

donde

$$Y = +\frac{19}{29};$$

il punto d'incontro cade tra la curva e l'asse, nessuna radice di

$$f(x) = 0$$

esiste nello intervallo

$$(0 \ldots 1/3).$$

Perciò, raccogliendo le diverse conclusioni particolari si deve dire che l'equazione

$$x^4 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$$

non ha radici reali.

V. L' equazione

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 5x - 2 = 0$$

potrebbe pel suo grado avere quattro radici reali, due delle quali — una positiva ed una negativa — esistono senz'altro, giacchè $f(x)$ è di grado pari, ed ha l'ultimo termine negativo (capitolo secondo); la negativa è sola perchè il polinomio trasformato

$$F(x) = x^4 - 3x^2 + 5x - 2$$

presenta un solo cambiamento di segno; la positiva può essere accompagnata da altre due, giacchè $f(x)$ presenta tre variazioni.

Limite superiore immediato delle radici di

$$f(x) = 0$$

è

$$3 + 1 = 4;$$

da questo si discende sino ad 1, il più piccolo dei numeri intieri che soddisfino alla condizione newtoniana; per $x = 1$ si ottiene

$$f(1) = +1,$$

per $x = 0$

$$f(0) = -2;$$

risultati dei quali si potevano prevedere i segni opposti, giacchè almeno una radice positiva deve esistere.

Lo specchio espone le serie per $x = 0$ ed $x = 1$.

x	0	1
$\frac{1}{\underline{/4}} f^{IV}$	+1	+1
$\frac{1}{\underline{/3}} f'''$	0	+4
$\frac{1}{\underline{/2}} f''$	−3	+3
$\frac{1}{1} f'$	+5	+3
f	−2	+1

Nulla di rimarchevole per la retta $f'''(x)$, la quale non sega l'asse nell'intervallo; l'arco della linea $f''(x)$ invece lo taglia, il che produce

una ondulazione per la curva $f'(x)$; se questa ondulazione sega l'asse, rimane incerto se la curva successiva

$$y = f(x)$$

lo sega in uno o in tre punti. (Veggasi la figura 23, nella quale è disegnato il caso in cui $f(x)$ tagli tre volte l'asse). È adunque necessario decidere se l'ondulazione $f'(x)$ taglia l'asse o no.

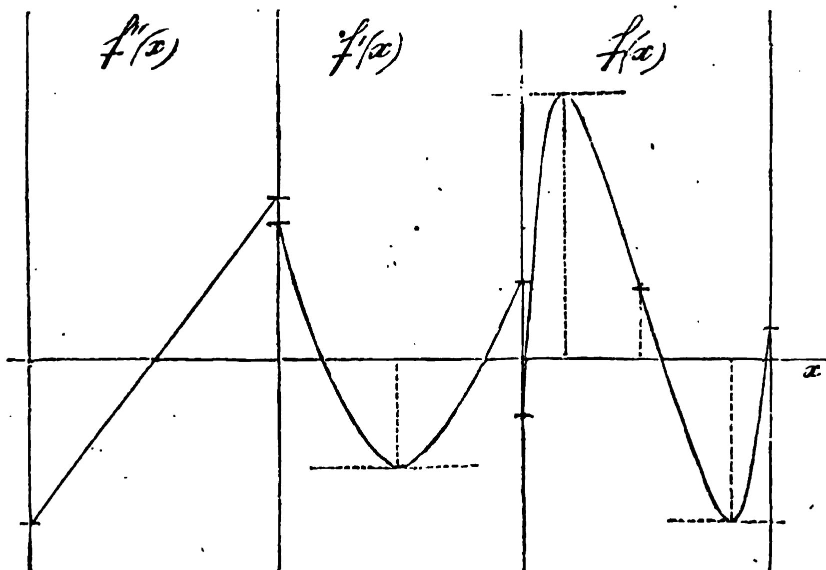


Fig. 23.

L'applicazione della prima parte del metodo delle due tangenti non basta, bisogna ricorrere anche alle equazioni di queste ultime. Qui viene a proposito l'osservazione fatta alla fine dell'esempio II: le ordinate dei punti di tangenza sono rispettivamente $+5$ e $+3$; le prime costanti nelle equazioni delle medesime:

$$1 \cdot 2 \times \bar{3} = -6; \quad \text{e} \quad 1 \cdot 2 \times 3 = 6,$$

e perciò per la

$$\text{tangente a sinistra,} \quad y - 5 = -6(x - 0),$$
$$\text{tangente a destra,} \quad y - 3 = 6(x - 1);$$

donde

$$Y = +1:$$

il punto d'intersezione cade fra la curva e l'asse, e l'ondulazione non arriva sino a questo. La linea successiva $f(x)$ non presenta per-

ciò alcuna tangente parallela all'asse, e sega una volta sola il medesimo. Lo studioso riferendosi alla trasformata

$$F(x) = x^4 - 3x^2 - 5x - 2$$

troverà che l'unica radice positiva della medesima è compresa fra 3 e 2 e che le serie per $x = 2$ ed $x = 3$ presentano il noto carattere (termini tutti positivi ad eccezione di un solo).

Riunendo le diverse conclusioni speciali, si deve dire che la

$$x^4 - 3x^2 + 5x - 2 = 0$$

ha due sole radici reali; una compresa fra -3 e -2 e l'altra fra 0 ed 1.

VI. Il grado dell'equazione

$$f(x) = 2x^4 - x^3 + 5x^2 - 7x + 2 = 0$$

permette di congetturare quattro radici reali, le quali tutte non possono essere che positive; giacchè

$$F(x) = 2x^4 + x^3 + 5x^2 + 7x + 2 = 0$$

non ha radici positive, quindi

$$f(x) = 0$$

non ne ha di negative: le quattro variazioni che s'incontrano in $f(x)$ non escludono la possibilità dell'esistenza di queste quattro radici. Limite superiore per le medesime è

$$\frac{7}{2+5} + 1 = 2;$$

colla regola newtoniana si discende sino ad 1;

$$f(1) = +1, \quad f(0) = +2;$$

ed è necessario qui ricorrere alle serie riportate nello specchio della pagina seguente. La retta $f'''(x)$ sega l'asse nell'intervallo; la curva $f''(x)$ presenta una ondulazione: la sola considerazione delle direzioni delle tangenti per gli estremi non è sufficiente a decidere se tale ondulazione seghi l'asse o no, ed è necessario ricorrere alle loro equazioni.

x	0	0,5	1
$\frac{1}{\lfloor 4}f^{IV}$	$+2$	»	$+2$
$\frac{1}{\lfloor 3}f'''$	-1	»	$+7$
$\frac{1}{\lfloor 2}f''$	$+5$	»	$+14$
$\frac{1}{1}f'$	-7	$-1,75$	$+8$
f	$+2$	$-0,25$	$+1$

Le ordinate dei punti di tangenza sono rispettivamente

$$1 \,.\, 2 \times 5 = 10; \quad 1 \,.\, 2 \times 14 = 28;$$

e le prime costanti

$$1 \,.\, 2 \,.\, 3 \times \overline{1} = -6; \quad 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \times 7 = 42;$$

donde le equazioni:

$$y - 10 = -6\,(x - 0),$$
$$y - 28 = 42\,(x - 1);$$

e in conseguenza

$$Y = +7;$$

e siccome anche le ordinate degli estremi dell'arco sono positive, così l'arco non arriva all'asse; $f'(x)$ non presenta ondulazioni ed ha un solo punto di sezione coll'asse; in conseguenza $f(x)$ presenta una ondulazione unica e sega l'asse al più in due punti; giacchè le ordinate estreme hanno lo stesso segno.

Questa osservazione porta già a concludere che due delle quattro radici supposte non esistono.

All'arco $f(x)$ compreso nell'intervallo è applicabile il solito metodo, e si ha:

tangente a sinistra, $y - 2 = -7\,(x - 0)$;

tangente a destra, $y - 1 = 8\,(x - 1)$;

donde

$$Y = -2\frac{1}{5},$$

il che non permette di concludere nulla; si restringe l'intervallo facendo

$$x = 0{,}5;$$

e limitando il calcolo al risultato f' inclusivamente si trovano i due numeri riportati nella tabella. Perciò le due radici supposte esistono difatti una fra 0 e 0,5, l'altra fra 0,5 ed 1: nel quale ultimo intervallo esiste eziandio una radice di

$$f^{4}(x) = 0.$$

Concludendo, l'equazione proposta

$$2x^4 - x^3 + 5x^2 - 7x + 2 = 0$$

ha due radici reali.

VII. L'equazione

$$f(x) = x^6 - x^5 + 2x^4 - 5x + 1 = 0$$

potrebbe pel suo grado avere sei radici reali, delle quali quattro al più positive, giacchè sono quattro le variazioni in $f(x)$; e siccome la trasformata

$$f(-x) = 0 = F(x) = x^6 + x^5 + 2x^4 + 5x + 1$$

non ha cambiamenti di segno e la proposta quindi non ha radici negative, così restano possibili queste sole quattro positive. È limite superiore per le medesime

$$5 + 1 = 6;$$

dal quale si discende a

$$\frac{5}{1+2} + 1 = 3 \text{ circa};$$

la regola newtoniana poi è soddisfatta anche dal 2, e si ha:

$$f(2) = +55,$$
$$f(1) = -2,$$
$$f(0) = +1.$$

Le serie relative a questi tre numeri sono riportate nel seguente quadro.

x	0	$^1/_2$	1	2
$\frac{1}{\lfloor 6} f^{VI}$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$
$\frac{1}{\lfloor 5} f^{V}$	-1	$+2$	$+5$	$+11$
$\frac{1}{\lfloor 4} f^{IV}$	$+2$	$+\frac{13}{4}$	$+12$	$+52$
$\frac{1}{\lfloor 3} f'''$	0	$+4$	$+18$	$+136$
$\frac{1}{\lfloor 2} f''$	0	$+\frac{43}{16}$	$+17$	$+208$
$\frac{1}{1} f'$	-5	$-\frac{33}{8}$	$+4$	$+171$
f	$+1$	$-\frac{89}{64}$	-2	$+55$

Intanto si scorge immediatamente che nell'intervallo

$$(2 \ldots 1)$$

esiste una radice di

$$f(x) = 0.$$

Cosicchè nell'intervallo 1 e 0 possano esservene tre. Siccome la retta $f^{V}(x)$ sega l'asse nello intervallo, così la linea successiva $f^{IV}(x)$ presenta una tangente parallela ad x ed è importante decidere se l'ondulazione corrispondente tagli l'asse o no.

I punti di tangenza hanno per ordinata rispettivamente:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \times 2 = 48;$$
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \times 12 = 288;$$

le tangenti hanno per prime costanti;

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \times \bar{1} = -120;$$
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \times 5 = 600;$$

perciò le equazioni sono:

tangente a sinistra, $y - 48 = -120(x - 0)$;

tangente a destra, $y - 288 = 600(x - 1)$;

donde

$$Y = -12;$$

l'intervallo è troppo largo, bisogna restringerlo. Facendo

$$x = \frac{1}{2}$$

si trova l'altra serie indicata nel quadro. Nell'intervallo

$$\left(\frac{1}{2} \ldots 1\right)$$

nulla vi è di notevole sino ad $f'(x)$ che sega una volta l'asse, il che porta una ondulazione per $f(x)$. Qui però basta, — ed è importante che lo studioso noti questo caso, il quale, presentito sino dal primo esempio, si presenta in modo diretto ora per la prima volta, — la considerazione delle direzioni delle tangenti agli estremi dell'arco e dei segni delle ordinate di questi estremi, per dire che l'arco non può segare l'asse nell'intervallo, giacchè svolgendosi nella regione delle y negative, esso presenta all'asse medesimo la convessità. Dunque; nessuna radice fra $1/2$ ed 1, e le tre possibili debbono cercarsi fra 0 e $1/2$. La retta $f^{v}(x)$ sega l'asse nell'intervallo e bisogna studiare se l'ondulazione successiva lo tagli anch'essa o no. Per questo non bastano le direzioni delle tangenti, ma è necessario ricorrere alle loro equazioni: — si trova: —

— Ordinate dei punti di tangenza:

$$1.2.3.4 \times 2 = 48; \quad 1.2.3.4 \times \frac{13}{4} = 78.$$

— Prime costanti di queste tangenti:

$$1.2.3.4.5 \times \bar{1} = -120; \quad 1.2.3.4.5 \times 2 = 240.$$

— Equazioni:

$$y - 48 = -120(x - 0);$$

$$y - 78 = 240(x - 0{,}5);$$

donde

$$Y = 18:$$

perciò l'arco f^{IV} non sega l'asse: procedendo, nulla vi è più di rimarchevole sino ad f che sega una sola volta l'asse nell'intervallo e non presenta tangente parallela ad x, od inflessioni.

Concludendo, l'equazione

$$x^6 - x^5 + 2x^4 - 5x + 1 = 0$$

ha due radici reali, una fra 0 ed $1/2$, l'altra fra 1 e 2.

— È necessario ora, arrestandosi alquanto, riassumere il metodo seguito negli esempi precedenti.

Nell'esame delle serie di numeri:

$$\frac{1}{\underline{/m}} f^{(m)}(L_1), \quad \frac{1}{\underline{/m-1}} f^{(m-1)}(L_1), \quad \frac{1}{\underline{/m-2}} f^{(m-2)}(L_1), \ldots$$

$$\ldots \frac{1}{\underline{/2}} f''(L_1), \quad \frac{1}{1} f'(L_1), \quad f(L_1);$$

$$\frac{1}{\underline{/m}} f^{(m)}(L), \quad \frac{1}{\underline{/m-1}} f^{(m-1)}(L), \quad \frac{1}{\underline{/m-2}} f^{(m-2)}(L), \ldots$$

$$\ldots \frac{1}{\underline{/2}} f''(L), \quad \frac{1}{1} f'(L), \quad f(L),$$

relative ad un intervallo qualsiasi $(L_1 \ldots L)$, non è necessario fermarsi che ai due termini corrispondenti

$$\frac{1}{\underline{/p}} f^{(p)}(L); \quad \frac{1}{\underline{/p}} f^{(p)}(L_1),$$

i quali per primi hanno segno opposto; da ciò resta assicurato che nell'intervallo $(L \ldots L_1)$ esiste uno ed un solo punto di sezione della linea $f^{(p)}(x)$ coll'asse.

Conseguenza di questo è che la linea successiva $f^{(p-1)}(x)$ presenta una ondulazione nell'intervallo: ora può avvenire che i risultati

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\underline{/p-1}} f^{(p-1)}(L_1) \\[2ex] \dfrac{1}{\underline{/p-1}} f^{(p-1)}(L) \end{cases}$$

abbiano entrambi lo stesso segno o segno opposto; se hanno lo stesso segno, l'ondulazione della $f^{(p-1)}(x)$ può segare o non segare l'asse, ed è necessario risolvere questa questione. A ciò serve

il metodo delle due tangenti, che deve applicarsi prima all'intervallo $(L \ldots L_1)$, poscia, occorrendo, ad intervalli minori, e che o su quello o su questi riesce sempre, esclusone un caso che verrà studiato in seguito.

Conseguenza dell'applicazione del metodo sarà:
— o che l'ondulazione non sega l'asse, e questo non ha alcuna influenza sulla linea successiva $f^{(p-2)}(x)$, e permette di continuare l'analisi nello stesso intervallo $(L \ldots L_1)$, arrestandosi di nuovo agli altri due termini corrispondenti successivi, che presentano segni contrari, ecc.;
— o che l'ondulazione sega l'asse, e allora per arrivare a questa conclusione, si saranno già separati in intervalli distinti i due punti di sezione, e l'analisi dovrà continuarsi su questi intervalli distinti, ciascheduno dei quali contiene un punto solo di sezione di $f^{(p-2)}(x)$; si rientra così nello stesso caso da cui si partiva, cioè dell'unico punto di sezione di $f^{(p)}(x)$.

Nel caso in cui

$$\frac{1}{\lfloor p-1 \rfloor} f^{(p-1)}(L), \quad \frac{1}{\lfloor p-1} f^{(p-1)}(L_1)$$

abbian segno contrario (veggasi la fig. 24), l'ondulazione presentata

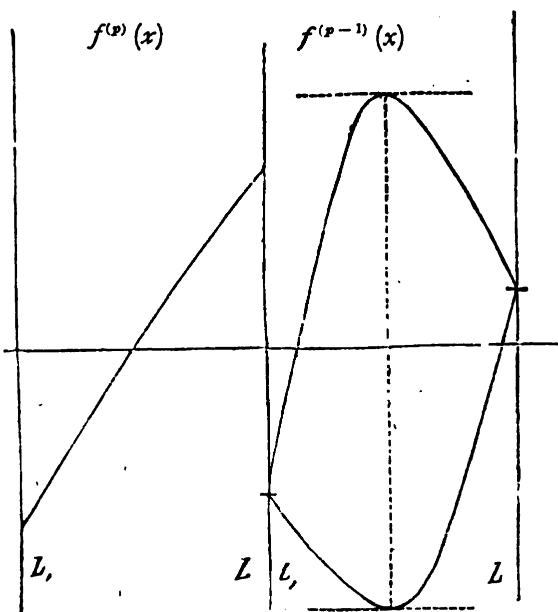


Fig. 24.

dalla linea $f^{(p-1)}(x)$ sega l'asse una volta sola: e la questione sarà già risolta nel caso speciale in cui $f^{(p-1)}(x)$ sia il primo polinomio $f(x)$;

ma negli altri casi, all'ondulazione presentata dalla linea successiva $f^{(p-2)}(x)$, perchè accompagnata da un punto di inflessione, non sarà evidentemente applicabile il metodo delle due tangenti: veggasi la fig. 31, al seguente capitolo, che rappresenta un arco su cui trovasi un punto di inflessione. Talchè per procedere occorrerà in generale spezzare l'intervallo in minori, partendo dal concetto di separare la radice di

$$f^{(p-1)}(x) = 0,$$

da quella di

$$f^{(p-2)}(x) = 0,$$

onde ottenere un intervallo nel quale la ondulazione di $f^{(p-2)}(x)$ esista da sola, senza punto d'inflessione.

Per quanto ha riguardo poi coi risultati ottenuti deve dirsi, che: o nell'intervallo considerato esiste una sola radice di

$$f(x) = 0,$$

o non ne esiste alcuna. Nel primo di questi due casi si conclude, come è già noto, che la radice è separata. Ma questa separazione può essere di due specie, e cioè:

— o nell'intervallo considerato la radice di

$$f(x) = 0$$

esiste da sola e non trovasene alcuna delle altre equazioni

$$0 = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \dots;$$

— ovvero avviene il contrario, e l'intervallo, oltre alla radice di

$$f(x) = 0,$$

contiene eziandio radici delle equazioni

$$0 = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \dots.$$

Ad esempio, per l'equazione

$$f(x) = 8x^3 - 14x + 7 = 0.$$

esiste una radice fra $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ e questo intervallo

$$\left(\frac{1}{2} \dots \frac{3}{4}\right)$$

non ne comprende alcuna delle equazioni

$$0 = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \ldots;$$

al contrario, per la stessa equazione esiste un'altra radice fra $\frac{3}{4}$ ed 1, e questo intervallo

$$\left(\frac{3}{4} \ldots 1\right)$$

ne comprende anche una dell'equazione

$$f'(x) = 0.$$

Parimenti nell'intervallo

$$\left(0 \ldots \frac{1}{2}\right)$$

trovasi una radice di

$$f(x) = x^6 - x^5 + 2x^4 - 5x + 1,$$

ma se ne trova anche una di

$$f^{v}(x) = 0; \quad \text{ecc.}$$

Allora che in un certo intervallo considerato esiste una sola radice dell'equazione qualsiasi

$$f^{(p)}(x) = 0,$$

e non ne esiste alcuna delle altre

$$0 = f(x) = f'(x) = \ldots,$$

si dirà che in questo intervallo tale radice è *isolata:* ed è chiaro che il carattere analitico relativo all'isolamento è; — le due serie riferentesi ai limiti di tale intervallo si compongono di risultati tali che due corrispondenti qualsiansi hanno lo stesso segno, ad eccezione dei soli due

$$\frac{1}{\underline{/p}} f^{(p)}.$$

A questo stato finale si potrà sempre condurre il calcolo, ad eccezione di un caso solo, nel quale rientra quello della non riuscita del metodo delle due tangenti; caso del resto che si presenta da sè nel processo del calcolo e che verrà trattato in seguito.

Intànto gli esempi seguenti, VIII e IX, studiando il campo nel quale si presumono possibili, o esistono di fatto le radici di due equazioni date, mostrano come s' impieghi vantaggiosamente il metodo dei tentativi di sostituzione per dividere il campo stesso in tanti intervalli, ciascheduno dei quali contenga una sola radice della serie d' equazioni

$$0 = f(x) = f'(x) = f''(x) = \ldots :$$

— è uno studio di questo genere riuscirà tanto più utile in quanto che esso fornirà criteri che guidino nel caso particolare dianzi notato, in cui l' intervallo maggiore

$$(L_1 \ldots L)$$

comprende una radice di

$$f^{(p)}(x) = 0,$$

ed una radice di

$$f^{(p-1)}(x) = 0.$$

VIII. L' equazione

$$f(x) = x^8 - 3x^5 + x^2 + 2 = 0$$

non ha radici negative e può averne due di positive al più.

È limite superiore immediato

$$3 + 1 = 4;$$

da questo si discende sino a 2, il più piccolo degli intieri che soddisfino alla regola newtoniana.

Supponendo

$$x = 2; \quad 1; \quad 0,$$

si trovano per f i valori

$$+166; \quad +1; \quad +2;$$

— nulla accenna alla convenienza di studiare prima uno dei due intervalli

$$(1 \ldots 2); \quad (0 \ldots 1),$$

piuttosto che l' altro; talchè s' incominci per esempio dall' $(1 \ldots 2)$.

Si trovano le serie trascritte nel quadro (settima colonna e decima colonna). — Niente di rimarchevole sino ad f''' inclusivamente; l' arco

della $f''(x)$ sega l'asse, quello della $f'(x)$ presenta una tangente parallela all'asse e lo taglia una volta; l'arco della $f(x)$ forma una ondulazione e presenta una inflessione; talchè, per quanto venne detto precedentemente, non è qui applicabile il metodo delle due tangenti; ed è necessario spezzare l'intervallo (1 ... 2) in due intervalli minori, tali che il punto di tangente parallela all'asse x ed il punto di sezione con quest'asse, presentati dalla linea $f'(x)$ nell'intervallo (1 ... 2), cadano il primo in uno, il secondo nell'altro dei due intervalli minori cercati.

x	0	0,35	0,50	0,56	0,625	1	1,1	1,2	2
$\frac{1}{\lvert\underline{8}} f^{\mathrm{VIII}}$	+1					+1			+1
$\frac{1}{\lvert\underline{7}} f^{\mathrm{VII}}$	0					+8			+16
$\frac{1}{\lvert\underline{6}} f^{\mathrm{VI}}$	0					+28			+112
$\frac{1}{\lvert\underline{5}} f^{\mathrm{V}}$	−3	−0,599	+4			+53			+445
$\frac{1}{\lvert\underline{4}} f^{\mathrm{IV}}$	0	− . . .	−3,125	−1,515	+1,306	+55			+1090
$\frac{1}{\lvert\underline{3}} f'''$	0	− . . .	−5,750	− . . .	−6,378	+26			+1672
$\frac{1}{\lvert\underline{2}} f''$	+1	−0,234	−2,312	− . . .	−4,654	−1	+10,6737		+1553
$\frac{1}{1} f'$	0	+	+0,125	−0,217	−0,740	−5	−4,1718	−0,0386	+788
f	+2	+	+2,160	+	+2,127	+1	+0,5220	+0,27485	+166

Si ha

$$f'(x) = 8x^7 - 15x^4 + 2x,$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} f''(x) = 28x^6 - 30x^3 + 1;$$

e le condizioni

$$f'(x) = 0, \quad \frac{1}{1 \cdot 2} f''(x) = 0$$

sono soddisfatte da uno solo dei numeri compresi fra 2 ed 1; come è indicato dal quadro generale.

Da questo si ricava inoltre:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} f''(1) = -1; \quad \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(1) = +26;$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} f^{\text{iv}}(1) = +55, \ldots$$

e quindi, indicando $\frac{1}{1 \cdot 2} f''(x)$ con $\Psi(x)$,

$$\Psi(1) = -1; \quad \Psi'(1) = +78; \quad \frac{1}{1 \cdot 2} \Psi''(1) = +330; \ldots$$

Conseguentemente

$$\Psi(1,1) = \Psi(1) + 0,1 \cdot \frac{\Psi'(1)}{1} + (0,1)^2 \cdot \frac{\Psi''(1)}{1 \cdot 2} + \ldots$$

$\Psi(1,1) = -1 + 7,8 + 3,30 +$ numeri positivi $=$ numero positivo: e siccome

$$\frac{1}{1 \cdot 2} f''(1)$$

è negativo, così la radice di

$$\frac{1}{1 \cdot 2} f''(x) = 0$$

è compresa tra 1 ed 1,1.

Inoltre risulta dal quadro:

$$f'(1) = -5; \quad \frac{1}{1 \cdot 2} f''(1) = -1;$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(1) = +26; \quad \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} f^{\text{iv}}(1) = 55;$$

perciò, indicando $f'(x)$ con $\varpi(x)$,

$$\varpi(1) = -5; \quad \frac{1}{1} \varpi'(1) = -2;$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} \varpi''(1) = +78; \quad \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \varpi'''(1) = 220, \ldots$$

donde:

$$\varpi(1,1) = \varpi(1) + 0{,}1 \,.\, \frac{\varpi'(1)}{1} + (0{,}1)^2 . \frac{\varpi''(1)}{1 \,.\, 2} + (0{,}1)^3 . \frac{\varpi'''(1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \ldots$$

$$\varpi(1{,}1) = -5 - 0{,}2 + 0{,}78 + 0{,}220 + \ldots :$$

si può quindi con grande probabilità supporre, che $\varpi(1{,}1)$, ossia $f'(1{,}1)$, sia un numero negativo: la sostituzione completa somministra infatti

$$f'(1{,}1) = -4{,}1718 :$$

e siccome $f'(1)$ è pur negativo, così la radice di

$$f'(x) = 0$$

non cade nell'intervallo

$$(1 \ldots 1{,}1),$$

nel quale cade quella di

$$\frac{1}{1 \,.\, 2} f''(x) = 0 :$$

pertanto $1{,}1$ è tal numero da condurre alla voluta separazione, e si deve procedere al calcolo della serie per $x = 1{,}1$, limitatamente ai tre risultati.

$$f(1{,}1); \quad \frac{1}{1} f'(1{,}1); \quad \frac{1}{1 \,.\, 2} f''(1{,}1),$$

giacchè è certo che i successivi sono tutti positivi.

— Intanto nell'intervallo

$$(1 \ldots 1{,}1)$$

l'arco della $f'(x)$ forma una ondulazione, ma questa non sega l'asse, giacchè di

$$f'(x) = 0$$

esiste una sola radice nell'intervallo maggiore

$$(1 \ldots 2),$$

e questa si sà compresa nell'intervallo minore

$$(1{,}1 \ldots 2);$$

del resto, la prima parte del metodo delle due tangenti applicata qui conduce tosto alla conferma di questo; poichè i punti estremi dell'arco cadono nella regione delle y negative, ed esso è convesso verso il basso. Conseguentemente $f(x)$ passa dallo stato $+1$ al $+0{,}5220$, e non vi è numero alcuno che lo annulli e che sia compreso fra 1 e ed $1{,}1$.

— Nell'intervallo

$$(1,1 \ldots 2),$$

$f'(x)$ sega l'asse, il che produce una ondulazione per $f(x)$ e bisogna applicare la seconda parte del metodo delle due tangenti per vedere se questi taglia l'asse o no. Le equazioni sono:

tangente a sinistra, $y - 0,522 = -4,1718\,(x - 1)$

tangente a destra, $y - 166 = 788\,(x - 2)$.

In questo caso si può far uso, nella ricerca del valore di Y, o più semplicemente del suo segno, del metodo esposto altra volta (capitolo sesto) sulle due equazioni generali

$$y = a\,x + b, \quad y = a'\,x + b';$$

s'arrivò allora alla conclusione che, scelto $a > a'$, Y risulta positivo o negativo, secondo che si ha $a\,b' >$ ovvero $< a'\,b$.
Qui perciò è

$$a = 788 > -4,1718 = a';$$

di più:

$$b = 166 - 788 \times 2 = -1410,$$
$$b' = 0,522 + 4,1718 = 4,6938,$$
$$a\,b' = 788 \times 4,7938,$$
$$a'\,b = 4,1718 \times 1410;$$

$$a\,b' < a'\,b; \quad Y \text{ negativo}:$$

— quindi è necessario restringere l'intervallo: $x = 1,2$ dà i risultati del quadro; dei quali si sono calcolati due soli, tutti gli altri essendo superflui; la radice di

$$f'(x) = 0$$

rimanendo compresa nell'intervallo minore

$$(1,2 \ldots 2),$$

si applichi a questo la seconda parte del metodo delle due tangenti:

tangente a sinistra, $y - 0,27485 = -0,0386\,(x - 1,2)$;

tangente a destra, $y - 166 = 788\,(x - 2)$;

$$a = 788 > -0{,}0386 = a',$$

$$b = 166 - 788 \times 2 = -1410,$$

$$b' = 0{,}27485 - 0{,}0386 \times \overline{1{,}2} = 0{,}32117,$$

$$a\,b' = 788 \times 0{,}32117;$$

$$a'\,b = 0{,}0386 \times 1410,$$

$$a\,b' - a'\,b = 199{,}65596 = \text{numero positivo};$$

cosicchè l'ondulazione non arriva sino all'asse, e non esistono radici di

$$f(x) = 0,$$

nemmeno fra 1,2 e 2.

— Concludendo, l'intervallo (1 ... 2) non contiene radici di

$$f(x) = 0.$$

Si passi all'intervallo

$$(0 \ldots 1):$$

il quadro fornisce le serie per $x = 0$ ed $x = 1$. — Niente di rimarchevole sino ad f^{III} inclusivamente; $f^{\text{V}}(x)$ s'annulla una volta nello intervallo, il che porta una ondulazione per l'arco della $f^{\text{IV}}(x)$. Questa ondulazione sega l'asse entro l'intervallo, giacchè la tangente all'estremo che ha per ascissa 0, forma un angolo ottuso; la tangente all'altro estremo, situato nella regione delle y positive, forma un angolo acuto; la convessità è rivolta al basso e l'arco si svolge prima nella regione delle y negative, poscia in quella delle positive. È necessario dunque per proseguire, dividere questo intervallo (0 ... 1). Si faccia perciò

$$x = 0{,}50:$$

il quadro dà le serie che si è spinta solamente sino ad f^{V} per una ragione ben nota.

— L'ondulazione che presenta $f^{\text{IV}}(x)$ nell'intervallo minore

$$(0 \ldots 0{,}50)$$

non taglia l'asse; giacchè i punti estremi sono l'uno sull'asse, l'altro nella regione delle y negative ed essa volge la convessità al basso. Nulla più di rimarchevole sino ad $f''(x)$ che sega l'asse una volta: a questo corrisponde per $f'(x)$ un punto di tangente parallela

all'asse x, ma l'ondulazione non nega quest'ultimo, giacchè le ordinate dei punti estremi sono positive, e la curva è concava verso il basso; dunque fra o e 0,50 nessuna radice di

$$f'(x) = 0.$$

e nessuna eziandio di

$$f(x) = 0.$$

— Rimane a studiare l'intervallo

$$(0{,}50 \ldots 1).$$

— Nulla di rimarchevole sino alla linea $f^{\text{IV}}(x)$, la quale sega una volta l'asse; cosicchè l'arco successivo $f'''(x)$ presenta una tangente parallela ad x, e di più, siccome le ordinate dei suoi punti estremi hanno segno opposto, così sega anche l'asse.

— È necessario anzitutto spezzare questo intervallo

$$(0{,}50 \ldots 1)$$

in due minori, tali che in uno di essi si trovi la radice di

$$f^{\text{IV}}(x) = 0,$$

nell'altro quella di

$$f'''(x) = 0.$$

Si ha, ricorrendo alle derivate:

$$\frac{1}{\underline{/3}} f'''(x) = 56\,x^5 - 30\,x^2,$$

$$\frac{1}{\underline{/4}} f^{\text{IV}}(x) = 70\,x^4 - 15\,x.$$

Se nella seconda di queste relazioni si fa

$$x = {}^1/_2 + {}^1/_8 = \frac{5}{8} = 0{,}625,$$

si trova

$$\frac{1}{\underline{/4}} f^{\text{IV}}\left(\frac{5}{8}\right) = +\,1{,}306;$$

mentre per la prima si ottiene:

$$\frac{1}{\underline{/3}} f''\left(\frac{5}{8}\right) = -\,6{,}378;$$

e confrontando questi due risultati con quelli ottenuti per $x = {}^1/_2$, ed $x = 1$:

x	0,50	0,625	1
$\frac{1}{\underline{\lvert 4}} f^{IV} \ldots$	$-3{,}125$	$+1{,}306$	$+55$
$\frac{1}{\underline{\lvert 3}} f'''$	$-5{,}750$	$-6{,}378$	$+26$

si vede che la radice di

$$f^{IV}(x) = 0,$$

che si trova nell'intervallo

$$(0{,}50 \ldots 1)$$

è ora ristretta nell'intervallo minore

$$(0{,}50 \ldots 0{,}625);$$

mentre quella di

$$f'''(x) = 0,$$

che si trova nello stesso intervallo $(0{,}50 \ldots 1)$, è ora ristretta nel minore

$$(0{,}625 \ldots 1).$$

Il quadro riassume tutta la serie per $x = {}^5/_8$, ad eccezione dei risultati oltre

$$\frac{1}{\underline{\lvert 4}} f^{IV}$$

necessariamente positivi.

— Nell'intervallo $(0{,}50 \ldots 0{,}625)$ esiste una radice di $f^{IV}(x)$; ma l'ondulazione della linea successiva $f'''(x)$ non sega l'asse; giacchè i suoi estremi cadono nella regione delle y negative, ed essa è convessa verso il basso. — Continuando, nulla più di rimarchevole sino ad $f'(x)$ che sega l'asse; ma questo non avviene per l'ondulazione di $f(x)$, la quale ha i suoi estremi nella regione delle y positive, ed è concava verso il basso: — dunque nessuna radice di

$$f(x) = 0$$

fra 0,50 e 0,625.

— Finalmente nell'intervallo

$$(0{,}625 \ldots 1)$$

$f'''(x)$ sega l'asse una volta, ma non è così dell'ondulazione di $f''(x)$, avente gli estremi nella regione delle y negative e convessa

verso il basso: in seguito nulla più di rimarchevole per nessuno dei polinomi: $f(x)=0$ manca di radici reali anche in questo intervallo.

Concludendo, l'equazione

$$x^8-3x^5+x^2+2=0$$

non è soddisfatta da alcun numero reale.

Si spingano innanzi questi calcoli sino ad ottenere nel campo studiato l'isolamento per le radici delle equazioni secondarie.

Nell'intervallo

$$(0 \ldots 0{,}50)$$

esiste una radice di

$$f^{\mathrm{v}}(x)=0$$

ed una di

$$f''(x)=0:$$

si separi quella da questa. Si ha:

$$\frac{1}{\underline{|5}}f^{\mathrm{v}}(x)=56\,.\,x^3-3\,,$$

$$\frac{1}{\underline{|2}}f''(x)=28\,.\,x^6-30\,.\,x^3+1\,;$$

e dopo pochi tentativi si vede che la radice tanto dell'uno quanto dell'altro è compresa fra 0,3 e 0,4 e che si separano per $x=0{,}35$:

$x\ldots$	0	0,35	0,50
$\frac{1}{\underline{\lvert 5}}f^{\mathrm{v}}$	-3	$-0{,}599$	$+4$
$\frac{1}{\underline{\lvert 2}}f''$	$+1$	$-0{,}234$	$-2{,}312$

Cosicchè la radice di

$$f^{\mathrm{v}}(x)=0$$

è compresa fra 0,35 e 0,50; quella di

$$f''(x)=0$$

fra 0 e 0,35.

Il quadro riassume per $x=0{,}35$ i due valori ora trovati e i segni rispettivi.

— Nell'intervallo

$$(^1/_2 \ldots {}^5/_8),$$

ossia

$$(0{,}50 \ldots 0{,}625),$$

cadono due radici, una di

$$f^{\text{iv}}(x) = 0,$$

l'altra di

$$f'(x) = 0.$$

Si ha:

$$\frac{1}{24} f^{\text{iv}}(x) = 70\,x^4 - 15\,x;$$

$$(x) = 8\,x^7 - 15\,x^4 + 2\,x.$$

Si trova tosto:

$$\frac{1}{24} f^{\text{iv}}(0{,}56) = -1{,}515 \ldots$$

$$\frac{1}{1} f'(0{,}56) = -0{,}217 \ldots;$$

e confrontando questi risultati cogli altri due

x	0,50	0,56	0,625
$\frac{1}{24} f^{\text{iv}}$	$-3{,}125$	$-1{,}515$	$+1{,}306$
$\frac{1}{1} f'$	$+0{,}125$	$-0{,}217$	$-0{,}740$;

si vede che la radice di $f^{\text{iv}}(x) = 0$ è compresa fra 0,50 e 0,56; mentre quella di $f'(x) = 0$ lo è fra 0,56 e 0,625.

Riassumendo e confrontando, si può concludere che:

Nell'intervallo	$(0 \ldots 0{,}35)$	esiste isolata una radice di		$f''(x) = 0$,
»	$(0{,}35 \ldots 0{,}50)$	»	»	$f^{\text{v}}(x) = 0$,
»	$(0{,}50 \ldots 0{,}56)$	»	»	$f'(x) = 0$,
»	$(0{,}56 \ldots 0{,}625)$	»	»	$f^{\text{iv}}(x) = 0$,
»	$(0{,}625 \ldots 1)$	»	»	$f'''(x) = 0$,
»	$(1 \ldots 1{,}1)$	»	»	$f''(x) = 0$,
»	$(1{,}2 \ldots 1)$	»	»	$f'(x) = 0$.

IX. L'equazione

$$f(x) = x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0$$

può avere quattro radici positive al più e ne ha necessariamente una negativa.

Per le radici positive è limite superiore 2; e si trovano facendo $x = 2$; 1; 0 i risultati:

$$f(2) = +52; \quad f(1) = +1; \quad f(0) = +6;$$

dai quali nulla può concludersi di definitivo: è necessario quindi studiare le serie relative, che si riportano nella tabella *A*, colonne (2), (1), (0), limitatamente ai termini indispensabili.

TABELLA *A*.

x	0	0,31	0,50	0,70	1	1,1	1,2	1,5	2
$\frac{1}{\lfloor 7} f^{VII}$	+1				+1				
$\frac{1}{\lfloor 6} f^{VI}$	0				+7				
$\frac{1}{\lfloor 5} f^{V}$	−2	+0,018	+3,25		+19				
$\frac{1}{\lfloor 4} f^{IV}$	0	−2,057	−0,625	+5,005	+25				
$\frac{1}{\lfloor 3} f'''$	−3	−4,598	−5,812	−4,396	+12				+477
$\frac{1}{\lfloor 2} f''$	+4	+0,674	−2,343	−5,630	−4	+1,300	+10,894		+498
$\frac{1}{1} f'$	−5	−3,471	−3,765	−5,387	−9	−9,330	−8,194	+15,859	+263
f	+6	+4,739	+4,070	+3,177	+1	+0,074	−0,817	−0,726	+52

L'intervallo (1 . . . 2) può contenere due radici della proposta; giacchè $f''(x)$ sega l'asse una volta sola, $f'(x)$ forma una ondula-

zione che sega l'asse del pari una volta, $f(x)$ forma una ondulazione che può segare l'asse. Si spezzi questo intervallo in minori, per modo che il punto di sezione di $f''(x)$ sia separato dal punto di sezione di $f'(x)$.

Si trova:

$$f'(x) = 7x^6 - 10x^4 - 9x^2 + 8x - 5;$$

$$\frac{1}{1 \,.\, 2} f''(x) = 21x^5 - 20x^3 - 9x + 4 = \varphi(x).$$

Ora dalla tabella si deduce:

$$\varphi(1) = -4; \quad \varphi'(1) = 3 \times 12 = 36; \ldots$$

e perciò

$\varphi(1{,}2) = \varphi(1) + 0{,}2 \,.\, \varphi'(1) + \ldots = -4 + 7{,}2 +$ numeri positivi $=$

$=$ numero positivo:

talchè l'unica radice di

$$\varphi(x) = 0,$$

ossia di

$$f''(x) = 0,$$

è compresa fra 1 ed 1,2.

Di più, siccome

$$f'(1{,}2) = f'(1) + 0{,}2\,\frac{f''(1)}{1} + 0{,}04\,\frac{f'''(1)}{1 \,.\, 2} + \ldots$$

$$= -9 - 0{,}2 \times 8 + 0{,}04 \times 36 + \ldots$$

$$= -9 - 1{,}6 + 1{,}44 + \ldots$$

è presumibilmente negativo, ossia l'unica radice di $f'(x)$ non è probabilmente compresa nell'intervallo

$$(1 \ldots 1{,}2);$$

così pare che il numero 1,2 conduca alla separazione voluta. Si trovano infatti, completando le sostituzioni, i tre risultati forniti dalla tabella *A* (colonna 1,2), i quali attestano che ciò ha luogo realmente. Di più, siccome il numero 1,2 conduce a

$$f(1{,}2) = -0{,}817,$$

così le due radici di $f(x) = 0$ supposte nell'intervallo $(1 \ldots 2)$ esistono di fatto; una nell'intervallo minore $(1 \ldots 1{,}2)$ insieme ad una

radice di $f''(x) = 0$, la seconda nell'intervallo minore $(1,2 \dots 2)$ insieme ad una radice di $f'(x) = 0$.

Resta ad esaminare l'intervallo $(0 \dots 1)$; se perciò si considerano le serie riportate nelle colonne (0) ed (1) della tabella A si trova che:

— $f^{v}(x)$ presenta un punto di sezione;

— $f^{iv}(x)$ forma una ondulazione, la quale sega l'asse una volta sola entro l'intervallo; come ce ne convincono i segni delle ordinate dei punti estremi, $(0, +)$, e le direzioni di massima delle tangenti condotte pei medesimi (angolo ottuso a sinistra, acuto a destra);

— $f'''(x)$ forma una ondulazione, che sega l'asse una volta sola, alla quale non sarebbe applicabile il solito metodo delle due tangenti: è necessario dividere questo intervallo in due minori, tali che in uno di essi sia compresa la radice di

$$f^{v}(x) = 0,$$

nell'altro quella di

$$f^{iv}(x) = 0.$$

Ciò si ottiene facendo x uguale 0,50: il quadro riassume i risultati importanti di questo calcolo.

— Nell'intervallo minore

$$(0 \dots 0,50)$$

trovasi la radice

$$f^{v}(x) = 0,$$

e quindi l'ondulazione di $f^{iv}(x)$, la quale, vedesi tosto, non sega l'asse che all'estremo di ascissa 0: poscia nulla di rimarchevole sino alla ondulazione di $f'(x)$, che può segare l'asse e alla quale è applicabile la seconda parte del metodo delle due tangenti:

per la tangente a destra, $y + 3,765 = -4,686\,(x - 0,50)$;

per la tangente a sinistra $y + 5 = 8\,(x - 0)$;

donde

$$Y = -2,744.$$

Questa ondulazione non arriva fino all'asse: $f(x) = 0$ non ha in conseguenza alcuna radice fra $(0 \dots 0,50)$.

— Nell'intervallo

$$(0,50 \dots 1)$$

cade una radice di

$$f^{iv}(x) = 0$$

ed una ondulazione ed una sezione di $f'''(x)$.

TABELLA *B*.

x	1	1,3	1,9	2
$\frac{1}{\lfloor 7} F^{vii}$	+ 1			+
$\frac{1}{\lfloor 6} F^{vi}$	+ 7			+
$\frac{1}{\lfloor 5} F^{v}$	+ 19			+
$\frac{1}{\lfloor 4} F^{iv}$	+ 25			+
$\frac{1}{\lfloor 3} F'''$	+ 12			+ 477
$\frac{1}{\lfloor 2} F''$	— 12	+ 18,331		+ 490
$\frac{1}{1} F'$	— 25	— 25,383	+ 146,310	+ 231
F	— 19	— 27,002	— 10,651	+ 8

È necessario spezzare questo intervallo in minori; si trova tosto che $x = 0{,}70$ serve al caso: i risultati importanti sono segnati nella tabella *A*. — Nell' intervallo

$$(0{,}50 \ldots 0{,}70)$$

trovasi la radice di

$$f^{iv}(x) = 0;$$

ma l'ondulazione della linea successiva non sega l'asse; ecc.: $f(x) = 0$ non ammette radici in questo intervallo. — Nell'intervallo

$$(0{,}70 \ldots 1)$$

figura la radice di

$$f'''(x) = 0,$$

ma l' ondulazione della linea successiva non sega l'asse, ecc., ed $f(x)$

non ammette numeri che lo annullino, compresi in questo intervallo minore.

Per l'unica radice negativa si studia la trasformata

$$F(x) = x^7 - 2x^5 - 3x^3 - 4x^2 - 5x - 6 = 0.$$

È limite superiore il 2, il più piccolo degli intieri che soddisfino alla regola newtoniana: cosicchè la richiesta radice negativa di $f(x) = 0$ è compresa fra -2 e -1.

Concludendo, l'equazione

$$f(x) = x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0$$

ha solamente tre radici reali: una compresa fra -2 e -1; una seconda fra 1,1 e 1,2; la terza fra 1,2 e 2.

Negli intervalli indicati le radici sono separate; si osservi se esse sono anche isolate, e in caso contrario si isolino, facendo questo anche per le radici dei polinomi secondari compresi entro i limiti studiati.

— Nell'intervallo

$$(1,2 \ldots 2)$$

la radice di

$$f(x) = 0$$

trovasi accompagnata da una di

$$f'(x) = 0;$$

usando il solito metodo dei tentativi di sostituzione, si spezza tosto questo intervallo nei due minori

$$(1,2 \ldots 1,5), \quad (1,5 \ldots 2),$$

il primo dei quali contiene solamente la radice di

$$f'(x) = 0;$$

il secondo solamente quella di

$$f(x) = 0;$$

come dai termini delle due serie rispettive riportati nel quadro.

— Nell'intervallo

$$(1 \ldots 1,2)$$

figurano due radici, una di

$$f''(x) = 0$$

ed una di

$$f(x) = 0:$$

esse restano isolate a mezzo del calcolo delle serie per

$$x = 1{,}5.$$

— L'intervallo

$$(0 \ldots 0{,}50)$$

contiene una radice di

$$f^{\text{v}}(x) = 0$$

ed una di

$$f''(x) = 0:$$

si trova facilmente che calcolando la serie per

$$x = 0{,}31,$$

l'intervallo medesimo resta diviso nei due minori:

$$(0 \ldots 0{,}31), \quad (0{,}31 \ldots 0{,}50),$$

nel primo dei quali figura la radice di

$$f^{\text{v}}(x) = 0,$$

nel secondo quella di

$$f''(x) = 0.$$

Dunque:

— nell'intervallo

$$(1{,}1 \ldots 1{,}2);$$

trovasi isolata una radice di

$$f(x) = 0;$$

— nell'intervallo

$$(1{,}5 \ldots 2)$$

una radice di

$$f(x) = 0;$$

— nell'intervallo

$$(0 \ldots 0{,}31)$$

una radice di

$$f^{\text{v}}(x) = 0;$$

— nell'intervallo

$$(0{,}31 \ldots 0{,}50)$$

una radice di

$$f''(x) = 0;$$

— nell'intervallo

$$(0{,}50 \ldots 0{,}70)$$

una radice di

$$f^{\text{IV}}(x) = 0;$$

— nell'intervallo

$$(0,70 \ldots 1)$$

una radice di

$$f'''(x) = 0;$$

— nell'intervallo

$$(1 \ldots 1,1)$$

una radice di

$$f''(x) = 0;$$

— nell'intervallo

$$(1,2 \ldots 1,5)$$

una radice di

$$f'(x) = 0.$$

Parimenti dalla tabella *B* si vede che fra $+2$ e $+1$ sono comprese tre radici: una di

$$F(x) = x^7 - 2x^5 - 3x^3 - 4x^2 - 5x - 6 = 0;$$

una di

$$F'(x) = 0,$$

ed una di

$$F''(x) = 0.$$

Si trova tosto che dividendo questo intervallo $(1 \ldots 2)$ nei tre minori

$$(1 \ldots 1,3); \quad (1,3 \ldots 1,9); \quad (1,9 \ldots 2);$$

il primo di questi contiene isolata la radice di

$$F''(x) = 0,$$

il secondo quella di

$$F'(x) = 0,$$

il terzo quella di

$$F(x) = 0.$$

CAPITOLO UNDECIMO.

In forza di quanto fu detto precedentemente si sanno trovare due numeri positivi λ e μ tali che l'arco della linea

$$y = f(x),$$

limitato ai punti di ascisse λ e μ, non presenti punti di inflessione, o tangenti parallele all'asse x, e seghi l'asse medesimo una volta sola. Queste condizioni geometriche equivalgono alle analitiche; che fra i numeri λ e μ non si trovino radici reali di

$$f''(x) = 0$$

o di

$$f'(x) = 0,$$

e ve ne sia una sola di

$$f(x) = 0,$$

per la quale vale appunto la limitazione

$$\lambda < \text{radice} < \mu.$$

Siccome delle due ordinate

$$f(\lambda) \quad \text{ed} \quad f(\mu),$$

le quali hanno necessariamente segni opposti, può essere positiva la prima e negativa la seconda o viceversa, ed inoltre siccome in cia-

scheduno di questi due casi l'arco può essere concavo o convesso verso l'asse x, così sono quattro le disposizioni possibili della curva nell'intervallo, e trovansi rappresentate rispettivamente nelle figure 25, 26, 27 e 28, in ciascheduna delle quali è

$$\overline{OA} = \lambda, \quad \overline{OC} = \text{radice}, \quad OB = \mu,$$

e si ha

$$\overline{OA} < \overline{OC} < \overline{OB}$$

per rappresentazione geometrica della limitazione precedente.

In ciascheduno di questi quattro casi si scelga quell'estremo dell'arco, che giace sulla parte convessa verso l'asse x (M nelle figure 25 e 28; N nelle figure 26 e 27); per esso si guidi la tangente all'arco (MT nelle figure 25 e 28; NT nelle figure 26 e 27), la quale sega l'asse nel punto T, necessariamente situato fra l'estremo C della ascissa OC, la quale rappresenta la radice reale di

$$f(x) = 0$$

nell'intervallo, e l'estremo dell'ascissa λ o dell'ascissa μ (A estremo dell'ascissa $\lambda = \overline{OA}$ nelle figure 25 e 28; B estremo dell'ascissa $\mu = \overline{OB}$, nelle figure 26 e 27). — Per l'altra estremità dell'arco (N nelle figure 25 e 28; M nelle figure 26 e 27) si conduca la parallela alla tangente guidata prima (NS nelle figure 25 e 28; MS nelle figure 26 e 27), parallela che taglia l'asse x nel punto S, necessariamente situato fra l'estremo C della ascissa OC, la quale rappresenta la radice reale di

$$f(x) = 0$$

nell'intervallo, e l'estremo dell'ascissa μ o dell'ascissa λ (B estremo dell'ascissa $\mu = \overline{OB}$ nelle figure 25 e 28; A, estremo della ascissa $\lambda = \overline{OA}$ nelle figure 26 e 27). Le costruzioni precedenti conducono in ogni caso a due nuove ascisse $\overline{OT}$ ed $\overline{OS}$, le quali somministrano per la radice OC una nuova limitazione ($\overline{OT} < OC < \overline{OS}$ per le figure 25 e 28; $\overline{OS} < \overline{OC} < \overline{OT}$ per le figure 26 e 27), la quale è più serrata della precedente $\overline{OA} < \overline{OC} < \overline{OB}$. Dei due nuovi limiti così ottenuti, quello OT dato dalla tangente può chiamarsi *limite di Newton*; quello OS dato dalla parallela, *limite di Fourier*.

Prima di procedere, è bene convincersi, che la condizione suammessa, in forza della quale la tangente deve essere condotta per l'estremo, situato sulla parte convessa dell'arco, non è superflua,

ma necessaria, e che non si potrebbe, scegliendo l'altro estremo per

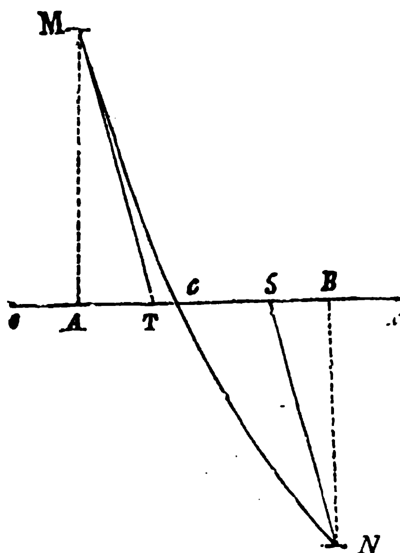


Fig. 25.

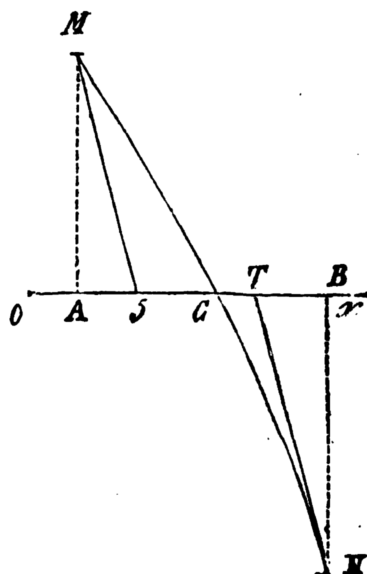


Fig. 26

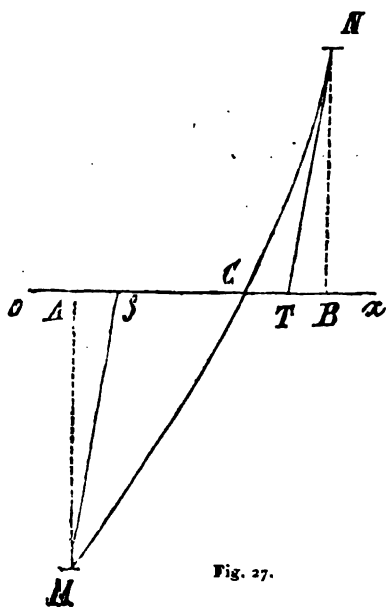


Fig. 27.

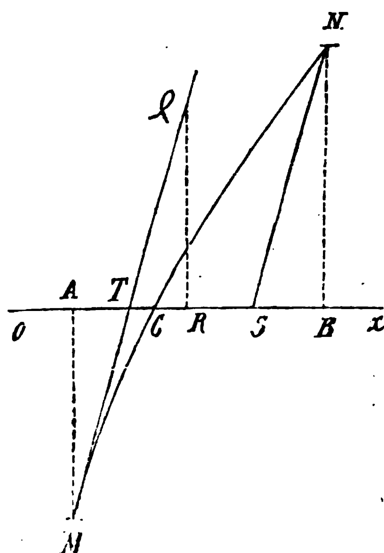


Fig. 28.

questa costruzione, essere ugualmente certi, che il nuovo intervallo

risulterà più serrato di quello dal quale si parte. Infatti, mentre la tangente condotta per l'estremo sulla parte convessa sega l'asse x necessariamente fra il punto C e l'estremo della ascissa λ, o dell'ascissa μ, non può dirsi lo stesso della tangente guidata per l'estremo sulla parte concava; così per esempio la fig. 29 presenta il caso, in cui la tangente condotta per l'estremo situato sulla parte concava sega l'asse al di fuori dell'intervallo oltre il punto B, e la parallela guidata per l'altro estremo taglia l'asse prima del punto A, talchè la nuova limitazione così ottenuta risulterebbe meno serrata di quella da cui si partiva.

Fig. 29.

Pertanto, per essere certi della utilità del risultato di queste costruzioni, è necessario condurre la tangente per l'estremo situato nella parte convessa dell'arco; e questo estremo ha per ascissa o λ, ò μ, secondo che per l'uno o per l'altro di questi due numeri i risultati f ed f'' sono dello stesso segno. Quello dei due numeri che soddisfa a questa condizione si può chiamare *primo limite*.

Se λ è il primo limite, l'espressione analitica del limite di Newton è

$$OT = \lambda_1 = \lambda - f(\lambda) : f'(\lambda);$$

quella del limite di Fourier, è

$$OS = \mu_1 = \mu - f(\mu) : f'(\lambda):$$

e viceversa; se il primo limite è μ, l'espressione analitica del limite di Newton è

$$OT = \mu_1 = \mu - f(\mu) : f'(\mu);$$

quella del limite di Fourier è

$$OS = \lambda_1 = \lambda - f(\lambda) : f'(\mu).$$

Per provare la verità di queste formole si consideri una qualsiasi delle quattro figure 25, 26, 27, 28, per esempio la 28. Anzitutto si ha

$$\overline{OA} = \lambda, \quad \overline{OB} = \mu, \quad \overline{AM} = -V, \quad \overline{BN} = +W,$$

dove i numeri positivi V, W, indicano rispettivamente i valori assoluti di $f(\lambda)$ e di $f(\mu)$. — Se, per maggiore semplicità e chiarezza, si fa rotare il triangolo MTA sul suo piano, attorno al vertice T, nel senso degli aghi di un orologio, sino a che esso venga a prendere la posizione QTR nella quale l'angolo QTR è opposto al vertice dell'MTA, il segmento $\overline{RQ}$ vale V unità, la tangente trigonometrica dell'angolo QTR o dell'angolo uguale NSB, vale $U = f'(\lambda)$. Ciò posto, deve scriversi identicamente:

$$\text{Limite di Newton} = \overline{OT} = \overline{OA} + \overline{AT} = \overline{QA} + \overline{TR} =$$
$$= \overline{OA} + \overline{RQ} \,.\, \text{cot.}\, QTR = \overline{OA} + \overline{RQ} : \text{tang}\, QTR =$$
$$= \lambda + V : U = \lambda - f(\lambda) : f'(\lambda) = \lambda_1.$$

$$\text{Limite di Fourier} = \overline{OS} = \overline{OB} - \overline{SB} = \overline{OB} - \overline{BN}.\, \text{cot.}\, NSB$$
$$= \overline{OB} - \overline{BN} : \text{tang}\, NSB = \mu - W : U =$$
$$= \mu - f(\mu) : f'(\lambda) = \mu_1$$

c. d. d. Questi ragionamenti sono applicabili a ciascheduna delle altre tre figure, per le quali si comincerebbe dalla rotazione del triangolo NSB attorno ad S (fig. 25), o del triangolo NTB attorno a T (fig. 26), o dell'altro MSA attorno ad S (fig. 27), ecc.

I nuovi limiti, λ_1 e μ_1, così ottenuti, si trovano rispettivamente in condizioni identiche a quelle in cui si trovavano i precedenti λ e μ, e cioè fra essi vi è una sola radice di

$$f(x) = 0,$$

e non ve ne è nessuna di

$$f'(x) = 0,$$

e di

$$f''(x) = 0;$$

e di più, il punto corrispondente all'ascissa λ_1 giace sulla parte convessa dell'arco, e il punto corrispondente all'ascissa μ_1 sulla concava,

o viceversa, se i punti corrispondenti all'ascissa λ e all'ascissa μ si trovano rispettivamente nell'uno o nell'altro di questi casi: perciò le costruzioni precedenti sono ancora applicabili, assumendo per primo limite λ_1 o μ_1, secondo che erasi considerato per primo λ o μ. Si ottengono così due nuovi limiti λ_2 e μ_2 più serrati dei precedenti, pei quali valgono le considerazioni fatte circa λ_1 e μ_1 e che si possono prendere a base di una nuova limitazione, ecc. — È utile notare l'andamento di queste approssimazioni successive: i numeri

$$\lambda, \quad \lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \ldots$$

s'avvicinano sempre più alla radice, ma ne restano tutti o minori o maggiori; i numeri

$$\mu, \quad \mu_1, \quad \mu_2, \quad \mu_3, \ldots$$

s'avvicinano sempre più alla radice, ma ne restano tutti o maggiori

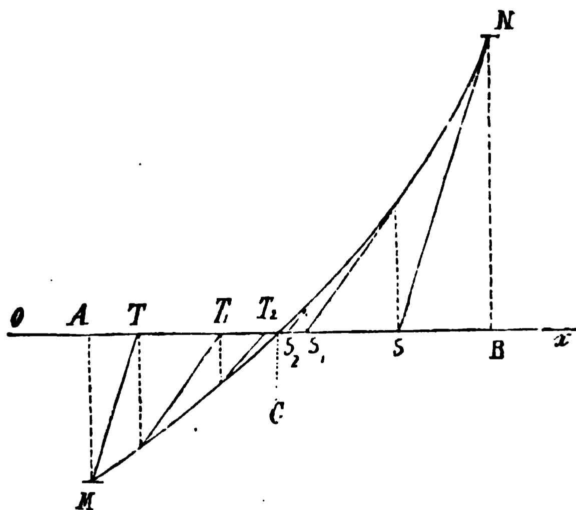


Fig. 30.

o minori. La fig. 30 lo mostra chiaramente; in essa si ha successivamente

$$\overline{OA} < \overline{OT} < \overline{OT_1} < \overline{OT_2} \ldots < OC$$
$$\overline{OB} > \overline{OS} > \overline{OS_1} > \overline{OS_2} \ldots > OC.$$

A questo punto si può intendere chiaramente la necessità, o l'utilità delle condizioni ammesse sul principio; che cioè l'arco, al quale s'applica il processo d'approssimazione, non presenti punti di inflessione o tangenti parallele all'asse x. — Se l'intervallo rac-

chiude un punto di inflessione (J, fig. 31), l'arco è convesso o concavo verso l'asse, tanto ad un estremo, quanto all'altro; nel caso della convessità, che è quello della figura, essendo indifferente condurre la tangente per l'una o per l'altra delle estremità, sia M l'estremità scelta per ciò ed MT la tangente, la parallela NS non sega l'asse necessariamente fra B e C, può segarlo fuori del segmento BC, ed è quello precisamente che avviene nella figura, nella quale il punto di sezione S cade fra A e C, e si è condotti alla limitazione erronea

$$OT < OC < OS.$$

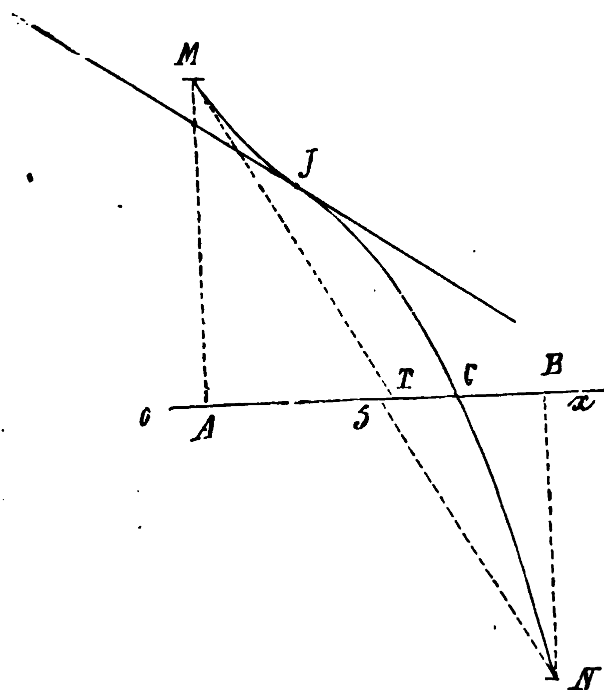


Fig. 31.

Il caso in cui l'arco sia concavo ad entrambi gli estremi, rientra in un caso d'esclusione considerato sin da principio, quando si giustificò la scelta dell'estremo situato sulla parte convessa dell'arco per condurre la tangente.

Quanto ai punti di tangenti parallele all'asse x s'intende sùbito come non ve ne possano essere due o in numero maggiore di due; giacchè allora l'intervallo racchiuderebbe uno o più punti

di inflessione, caso in cui, come si è visto ora, il metodo non è applicabile. L'esistenza di un solo punto di tangente parallela ad x poi, quantunque non renda erroneo il processo, pure può essere causa che l'approssimazione non proceda in buone condizioni, che un limite cioè sia vicinissimo alla radice e l'altro ne rimanga assai discosto, che manchi insomma il conveniente equilibrio fra i limiti, come è rappresentato nella fig, 32, con che si viene a togliere al metodo la rapidità necessaria.

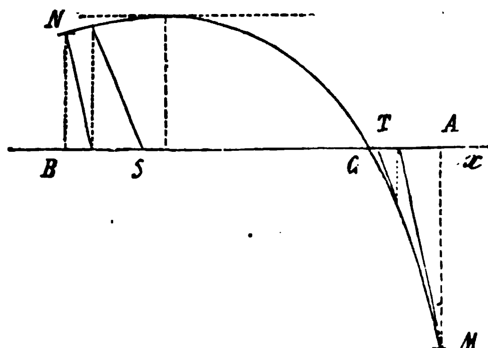


Fig. 32.

Cosicchè, concludendo, è indispensabile od utile che nell'intervallo non esistano punti di inflessione o tangenti parallele all'asse x, ossia che la radice di

$$f(x) = 0$$

si trovi isolata, limitando l'isolamento alle tre equazioni:

$$0 = f(x) = f'(x) = f''(x).$$

Gli esempi che seguono indicano nettamente la via che si deve seguire nei casi pratici.

I. Anzitutto è qui il luogo di trovare direttamente le limitazioni che nel secondo capitolo di questo libro si verificarono come convenienti all'unica radice reale di

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0,$$

e di aggiungerne delle nuove.

Da quanto venne discusso nel capitolo precedente detta radice ρ è compresa fra gli intieri successivi 2 e 3, ed in questo intervallo non figurano tangenti parallele all'asse x, o punti di inflessione della linea

$$y = f(x) = x^3 - 2x - 5.$$

Perciò le condizioni d'applicabilità del metodo di approssimazione sono soddisfatte già nella limitazione

$$2 < \rho < 3.$$

Ad ogni modo giova, e ciò si praticherà costantemente, cominciare da un intervallo più ristretto, e siccome a mezzo dei tentativi di sostituzione si può arrivare rapidamente sino alla cifra dei centesimi nei limiti che comprendono la radice, così si partirà costantemente dalla limitazione corrispondente; e nell'esempio precedente perciò dalla limitazione

$$2{,}09 < \rho < 2{,}10;$$

giacchè è

$$f(2{,}09) = -0{,}050671;$$

$$f(2{,}10) = 0{,}061000.$$

Il polinomio

$$f''(x) = 6x$$

è positivo per x positivo, perciò sono dello stesso segno $f(2{,}10)$ ed $f''(2{,}10)$; la tangente deve condursi pel punto di ascissa maggiore; ossia 2,10 è il *primo limite*.

Si ha pertanto

$$\mu = 2{,}10; \quad \lambda = 2{,}09;$$

$$f(\mu) = +0{,}061000; \quad f(\lambda) = -0{,}050671;$$

$$f'(\mu) = 11{,}23;$$

e in conseguenza:

Limite di Newton, $\mu_1 \doteq \mu - f(\mu) : f'(\mu) = 2{,}10 - \dfrac{0{,}061000}{11{,}23};$

Limite di Fourier, $\lambda_1 = \lambda - f(\lambda) : f'(\mu) = 2{,}10 + \dfrac{0{,}050671}{11{,}23}:$

ed effettuando le divisioni senza correggere l'ultima cifra conservata

$$\mu_1 = 2{,}10 - 0{,}005431 = 2{,}094569$$

$$\lambda_1 = 2{,}09 + 0{,}00451 = 2{,}09451;$$

donde la limitazione

$$2{,}09451 < \rho < 2{,}09457,$$

nella quale si è aumentata, come si farà costantemente, di una unità l'ultima cifra considerata nel limite a destra, per essere certi che il medesimo risulta in realtà maggiore della radice cercata.

È evidente intanto che alla radice convengono le cifre 2,0945, cioè quelle comuni ai due limiti ultimi trovati. Volendosi procedere ad una approssimazione ulteriore, giova, anzichè partire dai numeri λ_1 e μ_1 quali vengono dati nella limitazione, correggerli per modo, che rimanendo loro comuni le cifre 2,0945, differiscano di una sola unità nella cifra successiva. Al che si arriva facilmente nel modo che segue e che si adotterà in ogni caso. Si calcolano i risultati f, f', f'', f''' per x uguale a 2,0945 (cifre comuni ai due limiti): si ottiene:

$$\begin{cases} f\ (2{,}0045) = -0{,}000\,574\,591\,375 \\ f'\ (2{,}0945) = 11{,}160\,790\,75 \\ f''\ (2{,}0945) = 12{,}567\,0 \\ f'''(2{,}0945) = 6. \end{cases}$$

Questi risultati si pongono a base dell'algoritmo [C] (Capitolo quarto), e si trova

— 0,000 574 591 375	11,160 790 75	12,567 0	6
0,000 446 431 630 0	0,000 502 68	0,000 24	
0,000 000 010 053 6	0,000 000 004 8		
0,000 000 000 000 064			(H = 0,000 04)
— 0,000 128 149 691 336	11,161 293 434 8	12,567 24	6
0,000 111 612 934 348	0,000 125 672 4	0,000 06	
0,000 000 000 628 362	0,000 000 000 3		
0,000 000 000 000 001			(H = 0,000 01)
— 0,000 016 536 128 625	11,161 419 107 5	12,567 30	6
0,000 111 614 191 075	0,000 125 673 0	0,000 06	
0,000 000 000 628 365	0,000 000 000 3		
0,000 000 000 000 001			(H = 0,000 01)
0,000 095 078 690 816	11,161 544 780 8	12,567 36	6

donde

$$f(2{,}09455) = -0{,}000\,016\,536\,128\,625;$$
$$f(2{,}09456) = +0{,}000\,095\,078\,690\,816;$$
$$f'(2{,}09456) = +11{,}161\,544\,780\,8;$$

e perciò i valori da scegliersi per μ_1 e λ_1 sono

$$\lambda_1 = 2{,}09455 \quad \text{e} \quad \mu_1 = 2{,}09456,$$

e si ha

$$\mu_2 = \mu_1 - f(\mu_1) : f'(\mu_1) =$$

$$= 2{,}094\,56 - \frac{0\,000\,095\ldots}{11{,}161\,544\ldots}$$

$$= 2{,}094\,56 - 0{,}000\,008\,518\,416$$

$$= 2{,}094\,551\,481\,584.$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 - f(\lambda_1) : f'(\mu_1) = 2{,}09455 + \frac{0.000\,016\ldots}{11{,}161\,544\ldots}$$

$$= 2{,}09455 + 0{,}000\,001\,481\,52$$

$$= 2{,}094\,551\,481\,52;$$

e quindi lá nuova limitazione

$$2{,}094\,551\,481\,52 < \rho < 2{,}094\,551\,481\,59,$$

donde colla decima cifra decimale non corretta

$$\rho = 2{,}094\,551\,481\,5.\ *$$

II. L'equazione

$$f(x) = 8x^3 - 4x + 5 = 0$$

è soddisfatta da un numero negativo, giacchè la trasformata

$$f(-x) = 0 = F(x) = 8x^3 - 4x - 5 = 0,$$

presentando un solo cambiamento di segno, ammette una ed una sola radice positiva. Il più piccolo limite superiore in numeri intieri per questa radice è 2, e le serie per $x = 2$ ed $x = 1$ sono rispettivamente

x	$\frac{1}{\lfloor 3}F'''$	$\frac{1}{\lfloor 2}F''$	$\frac{1}{1}F'$	F
1	$+8$	$+24$	$+20$	-1
2	$+8$	$+48$	$+92$	$+51$

dalle quali si deduce che l'arco della linea

$$y = F(x) = 8x^3 - 4x - 5$$

---

* Si vegga Fourier, *Analyse des Équations déterminées*, première partie, pag. 209 a 217.

nell'intervallo non presenta tangenti parallele ad x o punti di inflessione; ossia che le equazioni

$$F'(x) = 0, \quad F''(x) = 0$$

non sono soddisfatte da nessun valore di x compreso fra 1 e 2; cosicchè le condizioni di applicabilità del processo di approssimazione sono soddisfatte già nella limitazione

$$1 < \rho < 2.$$

Da questa, per mezzo dei tentativi di sostituzione, si passa rapidamente all'altra

$$1{,}04 < \rho < 1{,}05;$$

giacchè è

$$F(1{,}04) = -0{,}161\,088; \quad F(1{,}05) = +0{,}061\,000.$$

Siccome

$$F''(x) = 48\,x$$

è positivo per x positivo, così hanno lo stesso segno $F(1{,}05)$, $F''(1{,}05)$; l'ascissa del punto dal quale deve essere condotta la tangente è 1,05, ossia è primo limite il maggiore.

Si ha:

$$\mu = 1{,}05; \quad \lambda = 1{,}04:$$

$$F(\mu) = 0{,}061\,000; \quad F(\lambda) = -0{,}161\,088;$$

$$F'(\mu) = 22{,}46:$$

donde

$$\mu_1 = \mu - F(\mu) : F'(\mu) = 1{,}05 - 0{,}061000 : 22{,}46;$$

$$\lambda_1 = \lambda - F(\lambda) : F'(\mu) = 1{,}04 + 0{,}161088 : 22{,}46;$$

$$\mu_1 = 1{,}05 - 0{,}00271 = 1{,}04729;$$

$$\lambda_1 = 1{,}04 + 0{,}0071 = 1{,}0471;$$

e in conseguenza la nuova limitazione

$$1{,}0471 < \rho < 1{,}0473.$$

Analogamente a quanto fu fatto precedentemente, si calcolino i risultati F, F' ... per $x = 1{,}047$ (cifre comuni ai due limiti ultimi ottenuti): si trova

$$\begin{cases} F(1{,}047) = -0{,}006\,153\,416 \\ F'(1{,}047) = 22{,}309\,016 \\ F''(1{,}047) = 50{,}256 \\ F'''(1{,}047) = 48. \end{cases}$$

Da questo numeri si passa rapidamente mediante l'algoritmo (*C*) (ed è questo precisamente l'esempio che ha servito ad illustrazione dell'algoritmo medesimo) agli altri:

$$F(1{,}0472) = -0{,}001\,690\,607\,616$$
$$F(1{,}0473) = \quad 0{,}000\,541\,550\,536$$
$$F'(1{,}0473) = \quad 22{,}324\,094\,96.$$

Si parte ora pertanto da

$$\mu_1 = 1{,}0473 \quad \text{e} \quad \lambda_1 = 1{,}0472$$

e si trova

$$\mu_2 = 1{,}0473 - \frac{0{,}000\,541\ldots}{22{,}324\ldots}$$
$$= 1{,}0473 - 0{,}000\,024\,258$$
$$= 1{,}047\,275\,742.$$

$$\lambda_2 = 1{,}0472 + \frac{0{,}001\,690\ldots}{22{,}324\ldots}$$
$$= 1{,}0472 + 0{,}000\,075\,730\,1$$
$$= 1{,}047\,275\,730\,1.$$

e quindi la nuova limitazione

$$1{,}047\,275\,73 < \rho < 1{,}047\,275\,75;$$

talchè, arrestandosi a questo punto, è

$$\rho = 1{,}047\,275\,7$$

colla settima cifra decimale non corretta.

Pertanto l'equazione proposta

$$8\,x^3 - 4\,x + 5 = 0$$

ha la radice negativa

$$-\,1{,}047\,275\,7.$$

III. L'equazione

$$f(x) = x^5 + 2\,x^4 + x^3 - 9{,}1236\,.\,x - 4{,}5618 = 0$$

ha, come si è veduto altra volta (Capitolo quarto), una sola radice

positiva compresa fra 1,43 ed 1,44; numeri pei quali $f(x)$ diventa

$$f(1{,}43) = -0{,}341\,398\,085\,7$$
$$f(1{,}44) = +0{,}077\,570\,342\,4.$$

Affine di convincersi se le condizioni per l'applicabilità del metodo sono soddisfatte, si può studiare quanto ha luogo nell'intervallo maggiore (1 ... 2). Se si arriva a provare che in esso non trovasi alcuna radice di $f''(x) = 0$, nè alcuna di $f'(x) = 0$, è certo che ciò ha luogo anche per l'intervallo (1,43 ... 1,44). Si ottengono i risultati seguenti:

x	$\frac{1}{\lfloor 5}f^{v}$	$\frac{1}{\lfloor 4}f^{iv}$	$\frac{1}{\lfloor 3}f'''$	$\frac{1}{\lfloor 2}f''$	$\frac{1}{\lfloor 1}f'$	f
1	+	+	+	+	+ 6,8764	−9,685 4
2	+	+	+	+	+ 146,876 4	+ 49,191 0;

talchè le condizioni di applicabilità del metodo di approssimazione, soddisfatte nell'intervallo (1 ... 2), lo sono eziandio nell'intervallo minore (1,43 ... 1,44).

Di più, siccome

$$f''(x) = 20\,x^3 + 24\,x^2 + 6\,x$$

per x positivo è positivo, così sono dello stesso segno

$$f(1{,}44) \quad \text{ed} \quad f''(1{,}44);$$

ossia il primo limite è 1,44, ed è necessario calcolare $f'(1{,}44)$ che si trova uguale a

$$42{,}484\,156\,80.$$

Si ha adunque

$$\mu = 1{,}44 \qquad , \qquad \lambda = 1{,}43$$
$$f(\mu) = +0{,}077\,570\,342\,4 \qquad f(\lambda) = -0{,}341\,398\,085\,7$$
$$f'(\mu) = +42{,}484\,156\,80$$

e conseguentemente:

$$\mu_1 = 1{,}44 - 0{,}077\,570 \ldots : 42{,}484\,15 \ldots$$
$$= 1{,}44 - 0{,}001\,825 = 1{,}438\,175:$$
$$\lambda = 1{,}43 + 0{,}341\,398 \ldots : 42{,}484\,15 \ldots$$
$$= 1{,}43 + 0{,}008\,035 = 1{,}438\,035.$$

Donde la nuova limitazione

$$1,4380 < \rho < 1,4382.$$

Si calcolano (algoritmo [*C*]) i risultati:

$$\begin{cases} f\ (1,438) = -0,007\ 161\ 984\ 940\ 832 \\ f'\ (1,438) = 42,248\ 303\ 417\ 680 \\ f''(1,438) = 117,727\ 449\ 44 \\ f'''(1,438) = 199,094\ 64 \\ f^{\text{iv}}(1,438) = 220,560 \\ f^{\text{v}}\ (1,438) = 120; \end{cases}$$

e da questi si passa immediatamente (algoritmo [*C*] agli altri:

$$f\,(1,4381) = -0,002\ 936\ 565\ 928\ 633\ 440\ 99$$
$$f\,(1,4382) = +0,001\ 290\ 030\ 557\ 167\ 024\ 32$$
$$f'\,(1,4382) = +42,271\ 852\ 889\ 754\ 888\ ;$$

cosicchè pei due nuovi limiti si debbono prendere i numeri

$$\mu_1 = 1,4382 \quad \text{e} \quad \lambda_1 = 1,4381$$

e continuare l'approssimazione cominciando da μ_1.
Si ha:

$$\mu_1 = 1,4382 - \frac{0,001\ 290\ 030\ldots}{42,271\ 852\ 889\ldots}$$

$$= 1,4382 - 0,000\ 030\ 517 = 1,438\ 169\ 483.$$

$$\lambda_1 = 1,4381 + \frac{0,002\ 936\ 565\ldots}{42,271\ 852\ldots}$$

$$= 1,4381 + 0,000\ 069\ 478 = 1,438\ 169\ 478;$$

conseguentemente

$$1,438\ 169\ 47 < \rho < 1,438\ 169\ 49,$$

e quindi

$$\rho = 1,438\ 169\ \dot{4}$$

colla settima cifra non corretta.

IV. L'equazione

$$f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 1 = 0$$

ha, come si può provare discutendola, una sola radice reale compresa fra 0,21 e 0,22; intervallo nel quale non s'annulla nè $f'(x)$, nè $f''(x)$.

Si può adunque scrivere per prima limitazione:

$$0{,}21 < \rho < 0{,}22.$$

Siccome poi

$$f''(0{,}21) = -0{,}22$$

è dello stesso segno di

$$f(0{,}21) = -0{,}010\,417,$$

così è primo limite il minore, e si ha:

$$\lambda = 0{,}21; \qquad \mu = 0{,}22;$$

$$f(\lambda) = -0{,}010\,417; \quad f(\mu) = +0{,}035\,144;$$

$$f'(\lambda) = 4{,}5569;$$

e quindi

$$\lambda_1 = 0{,}21 + 0{,}010\,417 : 4{,}5569 = 0{,}212\,28;$$

$$\mu_1 = 0{,}22 - 0{,}035\,144 : 4{,}5569 = 0{,}212\,288;$$

donde la nuova limitazione

$$0{,}212\,28 < \rho < 0{,}212\,29.$$

Si trova (algoritmo $[C]$):

$$\begin{cases} f\ (0{,}212\,2) = -0{,}000\,392\,320\,456 \\ f'\ (0{,}212\,2) = 4{,}556\,459\,56 \\ f''\ (0{,}212\,2) = -0{,}180\,4 \\ f'''\ (0{,}212\,2) = 18; \end{cases}$$

donde (algoritmo $[C]$):

$$\begin{cases} f\ (0{,}212\,28) = -0{,}000\,027\,804\,266\,944 \\ f'(0{,}212\,28) = 4{,}556\,445\,185\,6 \\ f\ (0{,}212\,29) = 0{,}000\,017\,760\,175\,967; \end{cases}$$

e conseguentemente:

$$\lambda_2 = 0{,}212\,28 + \frac{0{,}000\,027\ldots}{4{,}556\,445\ldots}$$

$$= 0{,}212\,28 + 0{,}000\,006\,102\,184$$

$$= 0{,}212\,286\,102\,184;$$

$$\mu_2 = 0{,}212\,29 - \frac{0{,}000\,017\ldots}{4{,}556\,445\ldots}$$

$$= 0{,}212\,29 - 0{,}000\,003\,897\,814$$

$$= 0{,}212\,286\,102\,186;$$

e quindi la nuova limitazione

$$0{,}212\,286\,102\,184 < \rho < 0{,}212\,286\,102\,187$$

e

$$\rho = 0{,}212\,286\,102\,18$$

colla undecima cifra non corretta.

Se lo studioso ha notato il metodo seguito nelle quattro applicazioni precedenti, si è certamente accorto che, sbarazzando man mano il processo di approssimazione dai criterî geometrici fondamentali, si sono sostituiti a questi i corrispettivi aritmetici; e così la condizione che nell'intervallo non si trovino tangenti parallele ad x e punti di inflessione ha fatto luogo alla corrispondente, che fra i due limiti non s'annullino $f'(x)$ ed $f''(x)$; alla scelta del primo limite fatta in base al criterio della convessità dell'arco si è sostituita la scelta in base alla condizione, che f'' ed f abbiano lo stesso segno; talchè raccogliendo tutto questo, e riunendolo alle varie osservazioni sparse qua e là, lo studioso si è certo già formato l'abitudine del processo aritmetico di approssimazione, che si riassume qui sotto.

a) Non si può cominciare ad applicare il metodo di approssimazione dalla limitazione

$$\lambda < \text{radice} < \mu,$$

se questa non soddisfa alle condizioni seguenti:

1.° fra i numeri λ e μ deve trovarsi una sola radice di

$$f(x) = 0$$

e non deve trovarsene alcuna di

$$f'(x) = 0 \quad \text{ed} \quad f''(x) = 0;$$

2.° l'intervallo $(\lambda \ldots \mu)$ deve essere abbastanza ristretto e, come criterio pratico al riguardo, si può ritenere che $\mu - \lambda$ non abbia ad eccedere $^1/_{100}$.

b) Per la scelta del primo limite vale il criterio, che è primo limite fra i due quello, per cui f ed f'' hanno segni uguali. In taluni casi è utile e possibile abbreviare le operazioni necessarie in questa ricerca, effettuandola sui limiti di forma più semplice, possibilmente intiera, di un intervallo più largo di $(\lambda \ldots \mu)$, ma che però, come questo, soddisfi alle condizioni di applicabilità del processo di approssimazione.

Se la scelta cade sul limite minore, vuol dire che non solo nella prima approssimazione, ma eziandio in ciascheduna delle successive deve ritenersi primo limite il minore dei due rispettivi; altrettanto dicasi, se la scelta cade sul limite maggiore.

A tale scelta tien dietro immediatamente il calcolo di f' per quel limite che essa ha fissato.

c) Si computano le espressioni

$$\lambda_1 = \lambda - f(\lambda) : f'(\lambda); \quad \mu_1 = \mu - f(\mu) : f'(\lambda)$$

se il limite scelto è λ; le altre

$$\mu_1 = \mu - f(\mu) : f'(\mu); \quad \lambda_1 = \lambda - f(\lambda) : f'(\mu)$$

se il limite scelto è μ; e i calcoli aritmetici si protraggono sino ad una cifra oltre quelle, che saranno comuni ai numeri λ_1 e μ_1.

In base a questi risultati si scrive la nuova limitazione

$$\lambda_1 < \text{radice} < \mu_1.$$

d) Per procedere ad una seconda approssimazione non si conservano generalmente per λ_1 e μ_1 i valori numerici quali si ottennero; ma invece si correggono nell'ultima cifra non comune, per modo che differiscano d'una sola unità di quest'ordine; ecc.

e) Pervenuti ad una limitazione qualsiasi

$$\lambda_n < \text{radice} < \mu_n$$

e volendosi arrestare, si scrive radice = numero risultante dalle cifre comuni a λ_n e μ_n: in questo valore l'ultima cifra decimale è quale viene fornita dal calcolo senza aver subìto correzione.

CAPITOLO DECIMOSECONDO.

Riprendendo l'argomento della separazione delle radici discutasi ora l'equazione

$$f(x) = x^4 + 0,67 \cdot x^2 - 0,59 \cdot x + 0,11 = 0$$

che non ha radici negative, e può averne due positive al più.

Il numero 0,40 soddisfa alla regola newtoniana dei limiti generali; 0,3 non più; e per x uguale a 0; 0,3; 0,4 si trovano le serie indicate rispettivamente nelle colonne 0; 0,3; 0,4 del quadro.

x	0	0,30	0,33	0,35	0,40
$\frac{1}{\lfloor 4} f^{IV}$	+1	+1			+1,00
$\frac{1}{\lfloor 3} f'''$	0	+1,2			+1,60
$\frac{1}{\lfloor 2} f''$	+0,67	+1,210			+1,630
$\frac{1}{1} f'$	−0,59	−0,080	−0,004 052	+0,050 500	+0,202
f	+0,11	+0,0014	+0,000 122 21	+0,000 581 25	+0,0068

Non esistendo nell' intervallo

$$(0 \ldots 0{,}3)$$

alcuna radice reale di

$$f(x) = 0,$$

resta a studiare l'intervallo

$$(0{,}30 \ldots 0{,}40).$$

Applicando il metodo delle due tangenti, si trova:

$$\text{Equazioni delle tangenti} \begin{cases} y - 0{,}0014 = -0{,}080\,(x - 0{,}30)\,; \\ y - 0{,}0068 = 0{,}202\,(x - 0{,}40)\,; \end{cases}$$

donde l'ordinata del punto di sezione (Capitolo sesto)

$$Y = -0{,}0027 \ldots$$

Pertanto l'intervallo

$$(0{,}30 \ldots 0{,}40)$$

è troppo largo. — Si calcolino e si riportino nel quadro i due primi termini della solita serie per

$$x = 0{,}35.$$

Le due radici non sono possibili che nell'intervallo fra 0,30 e 0,35; ed anche qui si deve far uso del noto metodo.
Le equazioni delle tangenti sono:

$$y - 0{,}0014 = -0{,}080\,(x - 0{,}30)\,;$$
$$y - 0{,}00058125 = 0{,}050\,5\,(x - 0{,}35)\,;$$

donde l'ordinata del punto di sezione

$$Y = -0{,}000\,64 \ldots$$

Talchè l'intervallo

$$(0{,}30 \ldots 0{,}35)$$

è tuttora troppo largo. — Si cerchino i due primi termini della serie per

$$x = 0{,}33,$$

e si applichi il metodo delle due tangenti all'intervallo

$$(0{,}33 \ldots 0{,}35),$$

giacchè nell' altro

$$(0{,}30 \ldots 0{,}33)$$

non è possibile alcuna radice.
Le equazioni delle tangenti sono:

$$y - 0{,}000\,122\,21 = -0{,}004\,052\,(x - 0{,}33)\,;$$

$$y - 0{,}000\,581\,25 = +0{,}050500\,(x - 0{,}35)\,;$$

donde per ordinata del punto di sezione

$$Y = +0{,}000\,081 \ldots .$$

Cosicchè l' arco non sega l'asse e l' equazione non ha radici reali. Però è da notarsi, che in questo esempio il punto di tangente parallelo all' asse x è evidentemente assai vicino all'asse; circostanza che ha reso la discussione lunga e faticosa.

Abbiasi finalmente l' equazione

$$0 = f(x) = x^4 - 4\,x^3 + 8\,x + 4.$$

I numeri 3; 2; 1; 0; posti invece di x in $f(x)$ e in tutti i polinomi derivati, somministrano i valori riportati nella tabella alle colonne rispettive:

x	0	1	2	2,50	2,70	2,75	3
$\frac{1}{\lfloor 4}f^{IV}$	+1	+1	+1				+1
$\frac{1}{\lfloor 3}f'''$	−4	0	+4				+8
$\frac{1}{\lfloor 2}f''$	0	−6	0				+18
$\frac{0}{\lfloor 1}f'$	+8	0	−8	−4,50	−0,748	+0,4375	+8
f	+4	+9	+4	+0,5625	+0,0121	0,003 906 25	+1

Dalla considerazione dei valori medesimi risulta, che le due radici positive possibili, in causa delle due variazioni di $f(x)$, debbono ricercarsi nell'intervallo

$$(2 \ldots 3).$$

Per convincersi se l'arco della $f(x)$ seghi l'asse o no, si applichi il solito metodo.
Le equazioni delle due tangenti pei punti estremi sono:

$$y - 4 = -8(x - 2);$$
$$y - 1 = 8(x - 3);$$

donde per l'ordinata, Y, del punto di sezione:

$$Y = -1{,}50.$$

L'intervallo $(2 \ldots 3)$ è troppo largo per decidere la questione. — Perciò si calcolino i due primi termini della consueta serie per $x = 2{,}5$ e si applichi il metodo delle due tangenti all'arco della $f(x)$ nell'intervallo

$$(2{,}5 \ldots 3),$$

giacchè l'intervallo

$$(2 \ldots 2{,}5)$$

non contiene alcuna radice reale di

$$f(x) = 0.$$

Si trova:

$$y - 0{,}5625 = -4{,}5(x - 2{,}5);$$
$$y - 1 = 8(x - 3);$$

donde per l'ordinata, Y, del punto di sezione

$$Y = -0{,}72 \ldots;$$

l' intervallo

$$(2{,}5 \ldots 3)$$

è adunque anch'esso troppo largo. Si calcolino in conseguenza i due primi termini della serie per $x = 2{,}75$; e si applichi il metodo delle due tangenti all'intervallo

$$(2{,}50 \ldots 2{,}75),$$

giacchè nell'altro

$$(2{,}75 \ldots 3)$$

mancano le radici supposte. Si trova:

$$y - 0{,}5625 = -4{,}50(x - 2{,}50);$$
$$y - 0{,}0039 \ldots = 0{,}4375(x - 2{,}75);$$

donde per ordinata, Y, del punto di sezione

$$Y = -0{,}046\ldots;$$

e l'intervallo

$$(2{,}50\ldots 2{,}75)$$

è ancora troppo largo.
Si calcolino i primi due termini della serie per $x = 2{,}70$, e si applichi il solito metodo all'intervallo

$$(2{,}70\ldots 2{,}75),$$

giacchè nell'altro

$$(2{,}50\ldots 2{,}70)$$

non sono possibili le radici cercate. Si trova

$$y - 0{,}0121 = -0{,}748\,(x - 2{,}70);$$
$$y - 0{,}0039\ldots = 0{,}4375\,(x - 2{,}75);$$

donde

$$Y = -0{,}0068\ldots;$$

cosicchè anche l'intervallo

$$(2{,}70\ldots 2{,}75)$$

è troppo largo.

Questa circostanza della non riuscita del metodo e del simultaneo decrescere di Y ad ogni operazione, giacchè si è trovato successariamente

$$Y = -1{,}50; \quad -0{,}72; \quad -0{,}046; \quad -0{,}0068;$$

può far nascere il dubbio che il minimo in discussione, invece di essere vicinissimo all'asse x, come avveniva nell'esempio precedente, cada effettivamente su questo asse; in altre parole, che l'asse sia tangente all'arco della linea $f(x)$ nell'intervallo; ossia che le due radici supposte siano entrambe geometricamente rappresentate dalla ascissa del punto di tangenza, ascissa sulla quale si trovano sovrapposte quelle due relative ai punti di sezione colla curva della secante, la cui posizione limite è rappresentata dalla tangente suddetta (Capitolo ottavo). È evidente intanto che ove ciò avvenisse, per quanto si restringesse l'intervallo e si applicasse il metodo delle due tangenti, non si arriverebbe giammai a decidere la questione; ma è evidente eziandio che reciprocamente la non riuscita di questo metodo può provenire o dall'essere effettivamente l'asse x tangente

all'arco della $f(x)$, od al non aver spinta sufficientemente innanzi l'approssimazione. Occorrono qui adunque delle considerazioni particolari, che risolvano la difficoltà. — Se l'arco della $f(x)$ tocca l'asse, l'ascissa ρ del punto di tangenza, oltre all'annullare $f(x)$; annulla anche $f'(x)$, giacchè questo non è altro, se non che un caso particolare di tangente alla curva $f(x)$ parallela all'asse x: ossia se si costruiscono gli archi delle linee $f(x)$ ed $f'(x)$ nell'intervallo, esiste nel medesimo un punto comune all'asse x, all'arco della $f'(x)$ e a quello della $f(x)$. Ora perchè $f(x)$ ed $f'(x)$ si seghino nell'intervallo è necessario, che la condizione di coesistenza delle due equazioni

$$f(x) = 0, \quad f'(x) = 0,$$

ossia la

$$\Psi(x) = f(x) - f'(x) = 0,$$

che si chiamerà *equazione ausiliaria,* abbia una radice reale compresa fra i limiti dell'intervallo medesimo. — Si cerchi quindi se questa radice reale ρ' dell'equazione ausiliaria

$$\Psi(x) = 0$$

esista difatti; si limiti, se esiste, fra due numeri vicinissimi r' ed R'; se r' ed R', posti invece di x in $f'(x)$, condurrànno a due risultati

$$f'(r'), \quad f'(R')$$

di segno contrario, ρ' sarà radice di $f'(x) = 0$ e radice *ripetuta due volte di* $f(x) = 0$; *ciò almeno entro la cerchia dell'approssimazione, alla quale si sarà spinto il calcolo.*

Nel caso attuale si formi perciò l'equazione ausiliaria:

$$0 = f(x) - f'(x) = \Psi(x)$$
$$0 = x^4 - 8x^3 + 12x^2 + 8x - 4;$$

si trova

$$\Psi(2{,}70) = f(2{,}70) - f'(2{,}70) = 0{,}760\,1$$
$$\Psi(2{,}75) = f(2{,}75) - f'(2{,}75) = -0{,}433\,593\,75\,.$$

Nell'intervallo (2,70 . . . 2,75) è compresa una ed una sola radice della proposta. Da questo intervallo si passa all'altro (2,73 . . . 2,74), giacchè

$$\begin{cases} \Psi(2{,}73) = +0{,}049\,182\,41 \\ \Psi(2{,}74) = -0{,}191\,334\,24. \end{cases}$$

Per spingere innanzi l'approssimazione si vedrà che il metodo esposto nel capitolo precedente è applicabile all'esempio attuale, che si deve scegliere per primo limite il maggiore e che si ha:

$$\Psi'(2{,}74) = -24{,}139\,104.$$

Può scriversi quindi:

$$\mu = 2{,}74\,; \qquad \lambda = 2{,}73\,;$$

$$\Psi(\mu) = -0{,}191\,334\,24; \quad \Psi(\lambda) = +0{,}049\,182{,}41\,;$$

$$\Psi'(\mu) = -24{,}139\,104;$$

donde

$$\mu_1 = 2{,}74 - \frac{0{,}191\,334\ldots}{24{,}139\ldots} = 2{,}732\,08\ldots$$

$$\lambda_1 = 2{,}73 + \frac{0{,}049\ldots}{24{,}139\ldots} = 2{,}732\,03\ldots$$

Partendo ora dall'intervallo

$$(2{,}7320\ldots 2{,}7321),$$

per cui si trova:

$$\mu_1 = 2{,}7321\,; \quad \lambda_1 = 2{,}7320\,;$$

$$\Psi(\mu_1) = -0{,}001\,180\,639\,604\,431\,9; \quad \Psi(\lambda_1) = 0{,}001\,219\,358\,976;$$

$$\Psi'(\mu_1) = -24{,}000\,864\,251\,356;$$

si ottiene:

$$\mu_2 = 2{,}7321 - \frac{0{,}00118\ldots}{24{,}000\ldots} = 2{,}732\,050\,809;$$

$$\lambda_2 = 2{,}7320 + \frac{0{,}001\,21}{24{,}000} = 2{,}732\,050\,804:$$

cosicchè, arrestandosi a questo punto, può dirsi che gli archi della $f(x)$ e della $f'(x)$ nell'intervallo si segano in un punto dell'asse x la cui ascissa ρ è definita dalla limitazione

$$2{,}732\,050\,80 < \rho < 2{,}732\,050\,81.$$

Sostituendo questi due limiti in $f'(x)$ si trova:

$$f'(2{,}732\,050\,80) = -0{,}000\,000\,181\,163\ldots;$$

$$f'(2{,}732\,050\,81) = +0{,}000\,000\,058\,346\ldots;$$

talchè nei limiti delle approssimazioni ottenute

$$\rho = 2{,}732\,050\,8;$$

è radice di

$$f'(x) = 0,$$

e lo è due volte di

$$f(x) = 0.$$

Quanto ha luogo nell'esempio precedente è un caso particolare di ciò che insegna il seguente teorema:

— *Se l'equazione ottenuta uguagliando a zero uno qualsiasi dei polinomi*

$$f(x), \quad f'(x), \quad f''(x), \ldots$$

per esempio $f^{(p)}(x)$, *ammette* n *radici uguali tutte fra loro e ciascheduna a* ρ, *le equazioni:*

$$f^{(p+1)}(x) = 0;$$
$$f^{(p+2)}(x) = 0;$$
$$f^{(p+3)}(x) = 0$$
$$\cdots\cdots$$

ottenute ugualmente a zero i polinomi successivi ad $f^{(p)}(x)$ *ammettono rispettivamente:*

$n - 1$ *radici tutte uguali fra loro e ciascheduna a* ρ;
$n - 2$ *radici tutte uguali fra loro e ciascheduna a* ρ;
$n - 3$ *radici tutte uguali fra loro e ciascheduna a* ρ;

ecc.

Infatti i polinomi

$$f^{(p)}(x), \quad f^{(p+1)}, (x), \quad f^{(p+2)}(x), \ldots$$

possono indicarsi rispettivamente con

$$\varphi(x), \quad \varphi'(x), \quad \varphi''(x), \ldots$$

Ora, siccome l'equazione

$$\varphi(x) = 0$$

ammette per ipotesi n radici, di cui ciascheduna uguale a ρ, così $\varphi(x)$, diviso per $(x - \rho)^n$ conduce ad un quoziente intiero $\psi(x)$, e si ha:

$$\varphi(x) = (x - \rho)^n \cdot \psi(x).$$

Se in questa identità ad x si sostituisce $z + H$, dove z ed H sono

due variabili, si ottiene:

$$\varphi(z+H) = [(z-\rho)+H]^n . \psi(z+H);$$

$$\varphi(z) + \frac{H}{1}\varphi'(z) + \dots$$
$$= \left[(z-\rho)^n + \frac{H}{1} n (z-\rho)^{n-1} + \dots\right]\left[\psi(z) + \frac{H}{1}\psi'(z) + \dots\right];$$

$$\varphi(z) + \frac{H}{1}\varphi'(z) + \dots$$
$$= (z-\rho)^n \psi(z) + \frac{H}{1}\left[n(z-\rho)^{n-1}\psi(z) + (z-\rho)^n . \psi'(z)\right] + \dots;$$

dove, è da notarsi, che tutti i termini seguenti, tanto nel primo quanto nel secondo membro, contengono potenze di H superiori alla prima.

Siccome questa identità sussiste qualunque sia H, così è necessario per quanto si dimostrò altra volta che sieno rispettivamente identici i coefficienti della stessa potenza di H in un membro e nell'altro; e quindi, considerando solamente i coefficienti di $\frac{H}{1}$, che sia

$$\varphi'(z) = n(z-\rho)^{n-1}\psi(z) + (z-\rho)^n \psi'(z).$$

Talchè la prima derivata di $\varphi(z)$ è

$$\varphi'(z) = n(z-\rho)^{n-1}\psi(z) + (z-\rho)^n \psi'(z);$$
$$\varphi'(z) = (z-\rho)^{n-1}[n\psi(z) + (z-\rho)\psi'(z)];$$

e siccome z è una variabile e può sostituirsi colla consueta lettera x,

$$\varphi'(x) = (x-\rho)^{(n-1)}[n\psi(x) + (x-\rho)\psi'(x)]:$$

$\varphi'(x)$ ammette cioè $n-1$ fattori uguali fra loro ed a $x-\rho$; e non ne può ammettere di più, giacchè $\psi(x)$ non è divisibile per $x-\rho$: perciò l'equazione

$$\varphi'(x) = 0.$$

ha $n-1$ radici uguali tutte fra loro e ciascheduna a ρ. — È inutile proseguire, giacchè $\varphi''(x)$ deducesi da $\varphi'(x)$ precisamente nello stesso modo in cui $\varphi'(x)$ deducesi da $\varphi(x)$, e quindi

$$\varphi''(x) = 0$$

ammette necessariamente $n-2$ radici uguali tutte fra loro e ciascheduna a ρ, ecc.; il che è quanto dovevasi dimostrare.

Si osservi qui che il risultato

$$\varphi'(x) = (x - \rho)^{n-1}\,[n\,\psi(x) + (x - \rho)\,\psi'(x)],$$

ottenuto ora da

$$\varphi(x) = (x - \rho)^n\,\psi(x),$$

non avrebbe mutato, quando si fosse considerato il polinomio

$$\varphi(x) = (x - \rho)^n . \psi(x) + C,$$

dove C rappresenta un numero indipendente da x; un polinomio perciò che non ammette come fattore $(x - \rho)^n$ e nemmeno una potenza meno elevata qualsiasi di $x - \rho$. Dunque, *se uno qualsiasi dei polinomi*

$$f(x),\quad f'(x),\quad f''(x),\ldots$$

ammette $n - 1$ fattori uguali a $x - \rho$, il precedente non ne ammette assolutamente n; può ammetterne n e può non ammetterne alcuno.

Ora se, in un caso numerico particolare, studiando col metodo dell'ultimo esempio trattato due polinomi successivi, come per esempio $f^{(q)}(x)$ e $f^{(q+1)}(x)$, si troverà che delle due equazioni risultanti

$$\begin{cases} f^{(q)}(x) = 0 \\ f^{(q+1)}(x) = 0 \end{cases}$$

la prima ammette due volte e la seconda una volta la radice ρ per cui vale la limitazione

$$r < \rho < R,$$

rimarrà dubbio se le equazioni

$$f^{(q-1)}(x) = 0,$$
$$f^{(q-2)}(x) = 0,$$
$$\ldots\ldots$$

ottenute uguagliando a zero i polinomi precedenti, ammettano o no rispettivamente 3, 4,... radici uguali a ρ. Per risolvere la difficoltà sarà criterio sufficiente, entro la cerchia delle approssimazioni offerte dalla limitazione

$$r < \rho < R,$$

che per $x = r$ ed R i due risultati $f^{(q-1)}$ abbiano segno opposto; i due $f^{(q-2)}$ segno uguale; i due $f^{(q-3)}$ segno opposto, ecc.; giacchè

pel teorema generale dimostrato dianzi, se uno di questi polinomi ha un numero pari di radici uguali tutte fra loro e ciascheduna a ρ, il successivo od il precedente ne ha un numero dispari.

Può darsi finalmente, che nella serie di relazioni

$$0 = f(x) = f'(x) = f''(x) = \ldots$$

esistano più gruppi staccati, ciascheduno formato con alcune equazioni successive, alle quali tutte convenga una o più volte la stessa radice ρ. In forza di quanto precede tale caso potrà ricondursi all'altro più semplice di due o più equazioni staccate

$$f^{(p)}(x) = 0, \quad f^{(q)}(x) = 0 \ldots$$

ciascheduna delle quali ammette una sol volta la radice ρ. Allora l'isolamento non riesce e sarà abbastanza assicurata l'esistenza di questa radice comune alle equazioni staccate, quando pei limiti sufficientemente ristretti, r, R di un certo intervallo i due risultati $f^{(p)}$, i due risultati $f^{(q)}$, ecc., siano rispettivamente di segno contrario.

È chiaro il concetto geometrico che deve formarsi lo studioso, quando nella serie

$$f(x), \quad f'(x), \quad f''(x), \ldots$$

si presentino tre polinomi successivi

$$f^{(p)}(x), \quad f^{(p+1)}(x), \quad f^{(p+2)}(x),$$

dei quali l'ultimo sia annullato da un numero ρ; il penultimo da due numeri uguali fra loro e ciascheduno a ρ ed il primo dia risultati di segno contrario pei limiti fra i quali tale numero ρ è compreso. — Intanto $f^{(p+2)}(x)$ sega l'asse (fig. 33) in un punto la cui ascissa è uguale a quella del punto, in cui la linea precedente $f^{(p+1)}(x)$ tocca l'asse; di più a questa ascissa medesima corrisponde nell'altra linea $f^{(p)}$ un punto di inflessione, pel quale la tangente, t, è parallela all'asse x giacchè $f^{(p+1)}$ ed $f^{(p+2)}$ per quell'ascissa risultano uguali a zero. Ora affinchè pei limiti, fra i quali è compresa l'ascissa comune, $f^{(p)}$ abbia segno contrario, come si suppone, non è necessario che la tangente t si confonda coll'asse x, ma è sufficiente che essa sia parallela a questo; ciò però fino a quando la limitazione assunta per ρ sia abbastanza lata, giacchè quando questa venga sufficientemente ristretta,

$$r < \rho < R$$

e si trovino pur tuttavia i riaultati $f^{(p)}(r)$ ed $f^{(p)}(R)$ di segno contrario, per certo, nel limite delle approssimazioni ammesse, dovrà dirsi che $\delta = 0$, che t coincide con x e che nel punto di ascissa ρ e di ordinata zero si confondono, il punto in cui $f^{(p+2)}(x)$ sega l'asse; — quello in cui $f^{(p+1)}(x)$ tocca l'asse; — l'inflessione di $f^{(p)}(x)$.

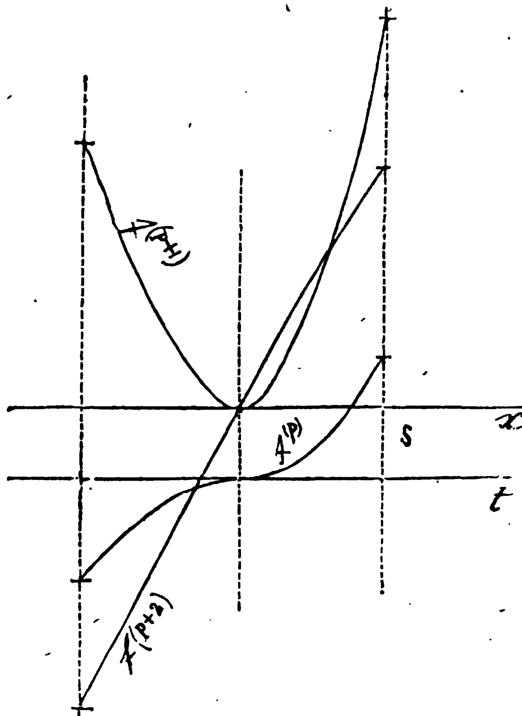


Fig. 33.

Analogamente si vede che nel caso di quattro polinomi successivi

$$f^{(p-3)}(x),\quad f^{(p-2)}(x),\quad f^{(p-1)}(x),\quad f^{(p)}(x),$$

l'ultimo dei quali ammette una volta, il penultimo due volte la radice ρ, per la quale vale la limitazione

$$r < \rho < R;$$

il secondo dà i risultati:

$$f^{(p-2)}(r),\quad f^{(p-2)}(R)$$

di segno opposto; il primo i risultati

$$f^{(p-3)}(r),\quad f^{(p-3)}(x)$$

dello stesso segno; — entro la cerchia delle approssimazioni indicate da

$$r < \rho < R;$$

nel punto di ascissa ρ coincidono un punto di sezione di $f^{(p)}(x)$; un punto di tangenza di $f^{(p-1)}(x)$; un punto di inflessione e tangenza di $f^{(p+2)}(x)$; due punti di inflessione e di tangenza di $f^{(p+3)}(x)$. Ecc.

Per esempio, la linea

$$y = (x + k)^{2s+1},$$

dove k è un numero qualsiasi ed s un numero intiero e positivo, si compone di due rami tangenti l'un l'altro ed entrambi all'asse x nel punto di ascissa $-k$, in cui si trovano confusi tutti i punti di tangente parallela ad x e tutte le inflessioni: tali rami si allontanano indefinitamente, l'uno nel senso delle y positive, l'altro in quelle delle negative, ecc.

Del pari la curva

$$y = (x + k)^{2s}$$

si compone di una ondulazione sola che tocca l'asse x nel punto di ascissa $-k$, ecc.

Concludendo, i problemi della separazione, dell'isolamento e delle limitazioni successive delle radici sono stati risolti per tutti i casi: entro la cerchia di quell'approssimazione numerica che si vuole, si sanno pertanto trovare tutti i numeri reali che soddisfano alla equazione

$$f(x) = 0.$$

— Se avverrà per caso che la medesima abbia radici reali intiere, queste si manifesteranno nei calcoli; se ne avrà delle frazionarie, se ne troverà l'espressione esatta o almeno tanto approssimata quanto si vorrà. — Anche il caso delle radici uguali, che è del resto affatto eccezionale, si manifesterà da sè nella non riuscita del metodo di separazione, e l'uso della equazione ausiliaria proposta permetterà di discuterlo completamente.

FINE.







